Równania różniczkowe liniowe rzędu pierwszego

1. Równanie liniowe jednorodne

Definicja 1.1

Równaniem różniczkowym liniowym rzędu pierwszego nazywamy równanie

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x),} \quad RN \Leftarrow \text{niejednorodne} \quad (RLN)$$

$y' \to \frac{dy}{dx}$

$p(x), q(x)$ — f-cje

gdzie funkcje p i q są określone i ciągłe na wspólnym przedziale $I \in \mathbb{R}$.

Jeżeli $q(x) = 0$, dla każdego $x \in I$, to równanie

$$\boxed{y' + p(x)y = 0} \quad RJ \Leftrightarrow RLJ$$

nazywa się równaniem liniowym jednorodnym (RJ), w przeciwnym przypadku równanie nazywa się równaniem liniowym niejednorodnym (RN).

Niech dane będzie równanie jednorodne

$$RJ \quad y' + p(x)y = 0. \quad \Leftarrow \text{zawsze o zmiennych rozdzielonych}$$

$$y' = -p(x)y$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)\cdot y \;/ : y, \cdot dx, \quad y \neq 0 \quad \text{ale } y=0 \text{ jest rozwiązaniem r-nia RJ}$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx \quad \Leftarrow \text{zmienne rozdzielone}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int p(x)\,dx \Rightarrow |y| = e^{-\int p(x)dx}$$

Przykłady

1) $y' + \frac{1}{x^2}y = 0.$
2) $y' = y\,tg\,x.$

1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}y \;/ : y \cdot dx$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{x^2}dx \qquad -\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x} + C$$

$$\ln|y| = \frac{1}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{\frac{1}{x} + C} \Leftrightarrow |y| = e^{\frac{1}{x}} \cdot \underbrace{e^{C}}_{>0}$$

całka ogólna r-nia jednorodnego $\swarrow$ CORJ

$$y = C_1 e^{\frac{1}{x}}, \quad C_1 \neq 0$$

ale rozwiązanie powyższe nie uwzględnia $y=0$, czyli ostatecznie

CO: $y = Ce^{\frac{1}{x}}$, $C \in \mathbb{R}$

2) $y' = y\,\mathrm{tg}x$

$\frac{dy}{dx} = y\,\mathrm{tg}x \quad \Big| :y,\ y \neq 0 \quad \cdot dx$

$\frac{dy}{y} = \mathrm{tg}x\,dx$

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|\cos x| + C$

$\ln|y| + \ln|\cos x| = C$

$\ln|y \cdot \cos x| = C$

$|y \cdot \cos x| = \underbrace{e^C}_{C_1 > 0}$

$y \cdot \cos x = \underbrace{\pm C_1}_{C_2 \neq 0} \quad + \quad y = 0$

CO: $y = \frac{C}{\cos x}$, $C \in \mathbb{R}$

2. Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne – metoda uzmienniania stałej

Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne

$$y' + p(x)y = q(x), \quad \text{(RN)}$$

rozwiązujemy tzw. metodą współczynników nieoznaczonych.

W tym celu najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne, czyli

$$y' + p(x)y = 0.$$

Całką ogólną równania jednorodnego jest

$$y = Ce^{-P(x)}.$$

Następnie stałą C zastępujemy funkcją $C(x)$ tak dobraną, żeby funkcja

$$(1) \qquad y = C(x) \cdot e^{-P(x)}$$

była całką równania niejednorodnego.

Przykłady

1) $y' - 2xy = x - x^3$.
2) $y' \sin x + y \cos x = \sin 2x$.

Ad. 1) RLJ: $y' - 2xy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$$

$$\ln|y| = x^2 + C \quad , C \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{x^2+C} = e^{x^2} \cdot \underbrace{e^C}_{C_1 > 0}$$

$$y = \pm C_1 e^{x^2}$$

$$\underbrace{y = C e^{x^2}}_{CORJ}$$

Uzmienniam stałą C, czyli $C = C(x)$, więc (*) $y = C(x) \cdot e^{x^2}$

Obliczam y': $y' = C'(x) \cdot e^{x^2} + C(x) \cdot e^{x^2} \cdot 2x$

$$y' = C'(x) e^{x^2} + 2x C(x) e^{x^2}$$

Wstawiam y' oraz y do równania 1)

$$y' - 2xy = x - x^3$$

$$\underbrace{C'(x) e^{x^2} + \cancel{2x C(x) e^{x^2}}}_{y'} - \underbrace{\cancel{2x \cdot C(x) e^{x^2}}}_{y} = x - x^3$$

upraszczają się składniki zawierające $C(x)$ (ZAWSZE!)

$$C'(x) e^{x^2} = x - x^3$$

$$C'(x) = \frac{x - x^3}{e^{x^2}} \Rightarrow C(x) = \int \frac{x - x^3}{e^{x^2}}\,dx$$

$$C(x) = \underbrace{\int \frac{x}{e^{x^2}}\,dx}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{x^3}{e^{x^2}}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int \frac{x\,dx}{e^{x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \\ x\,dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{\frac{1}{2}dt}{e^t} = \frac{1}{2}\int e^{-t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-t} + C =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C ,$$

$$I_2 = \int \frac{x^2 \cdot x}{e^{x^2}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t \\ x\,dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right\} = \int \frac{t\,\frac{1}{2}dt}{e^t} = \frac{1}{2}\int t \cdot e^{-t}\,dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = t & v' = e^{-t} \\ u' = 1 & v = -e^{-t} \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\left(-te^{-t} + \int e^{-t}\,dt\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t} + C = -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

$$C(x) = I_1 - I_2 = \cancel{-\frac{1}{2}e^{-x^2}} + \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + \cancel{\frac{1}{2}e^{-x^2}} + C$$

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + C$$

Wracamy do (*) $y = \left(\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + C\right)e^{x^2}$

$$y = \frac{1}{2}x^2 \underbrace{e^{-x^2} e^{x^2}}_{e^0 = 1} + Ce^{x^2}$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + Ce^{x^2}$$ ← CORN

całka ogólna równania niejednorodnego

CGR

Uwaga! Metoda uzmienniania stałej jest zawsze skuteczna.

3.Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne – metoda przewidywań

Jeżeli funkcja $y_1(x)$ jest pewną całką szczególną równania różniczkowego liniowego niejednorodnego **(CSRN)**

$$y' + p(x)y = 0,$$

a funkcja $y_2(x)$ jest całką ogólną równania różniczkowego liniowego jednorodnego **(CORJ),** to funkcja

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x),$$

Jest całką ogólną równania różniczkowego liniowego niejednorodnego **(CORN).**

W skrócie

CORN = CSRN + CORJ

Na powyższym twierdzeniu opiera się metoda szukania całki ogólnej równania niejednorodnego metodą przewidywań. Najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne i otrzymujemy CORJ, następnie próbujemy zgadnąć całkę szczególną równania niejednorodnego. Ich suma jest szukaną całką ogólną równania niejednorodnego CORN.

Omówimy pewne typy równań liniowych, w których stosunkowo łatwo przewidzieć całkę CSRN.

$$(**)\quad y' - 2y = \overbrace{3e^{3x}}^{q(x)},$$

1° RJ: $y' - 2y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = 2y \quad \Big| : y \cdot dx, \quad y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y} = 2\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int dx$$

$$\ln|y| = 2x + C$$

$$|y| = e^{2x + C} \Rightarrow |y| = e^{2x} \cdot e^{C}$$

$$|y| = C_1 e^{2x}$$

$$\underbrace{y = Ce^{2x}}_{\text{CORJ}}$$

2° Przewidujemy całkę szczególną równania $(**)$ w tej postaci, co funkcja $q(x)$

$q(x) = 3e^{3x}$ czyli przew. $y_s = k \cdot e^{3x}$, k – stała

obliczamy $y_s' = k \cdot e^{3x} \cdot 3 = 3ke^{3x}$

wtedy $(**)$ $\underbrace{3ke^{3x}}_{y'} - 2\underbrace{ke^{3x}}_{y} = 3e^{3x}$

$$ke^{3x} = 3e^{3x} \Rightarrow k = 3$$

czyli przewidywanie jest słuszne więc mamy CSRN: $\underline{y_s = 3e^{3x}}$

3° Odpowiedź: sumujemy CSRN i CORJ,

$$\underbrace{y = 3e^{3x} + Ce^{2x}}_{\text{CORN}}$$

! Uwaga! Metoda przewidywań nie zawsze jest skuteczna. Wtedy trzeba przewidzieć rozwiązanie w bardziej skomplikowanej postaci.

Np. $y' - 4y = 2e^{4x}$,

1° RJ: $y' - 4y = 0$

$\frac{dy}{dx} = 4y$

$\frac{dy}{y} = 4dx \Rightarrow \ln|y| = 4x + C$

$\underbrace{y = Ce^{4x}}_{CORJ}$

2° przewidujemy $y_s = ke^{4x}$

$y_s' = 4ke^{4x}$

wtedy RN: $\underbrace{4ke^{4x}}_{y'} - 4 \cdot \underbrace{ke^{4x}}_{y} = 2e^{4x}$

$\underline{0 = 2e^{4x}}$

równanie sprzeczne

$\Downarrow$

mylne przewidywanie

Więc przewidujemy $y_s = (mx+n)e^{4x}$, m, n – stałe

$y_s' = me^{4x} + 4(mx+n)e^{4x}$

Wstawiamy do RN:

$me^{4x} + 4\cancel{(mx+n)}e^{4x} - 4\cancel{(mx+n)}e^{4x} = 2e^{4x}$

$me^{4x} = 2e^{4x} \Leftrightarrow \underline{\underline{m = 2}}$

Co z n?

Otóż, n się uprościło więc jest dowolne.

Przyjmijmy $n = 0$: $y_s = (2x+0)e^{4x}$

$\underbrace{y_s = 2xe^{4x}}_{CSRN}$

3° Ostatecznie

$CORN = CSRN + CORJ$

$\underline{y = 2xe^{4x} + Ce^{4x}}$

Rozwiążmy równanie

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

(A) $y'\sin x + y\cos x = \sin 2x \quad |:\sin x$,

$$y' + y\underbrace{\frac{\cos x}{\sin x}}_{p(x)} = \underbrace{2\cos x}_{q(x)}, \quad \sin x \neq 0$$

$\underbrace{x \neq k\pi}$, $k \in Z$

RJ: $\quad y' = -y\frac{\cos x}{\sin x}$

$$\frac{dy}{dx} = -y\frac{\cos x}{\sin x} \quad \Big| :y, \; \cdot dx, \quad y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

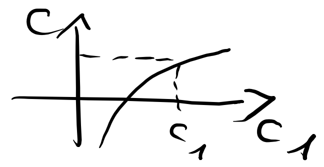
$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$\ln|y| = -\ln|\sin x| + C$$

$$\ln|y| = C - \ln|\sin x| ,$$

Niech



$C = \ln C_1, \quad C_1 \in (0,\infty)$

$$\ln|y| = \ln C_1 - \ln|\sin x|$$

$$\ln|y| = \ln\frac{C_1}{|\sin x|}$$

$$|y| = \frac{C_1}{|\sin x|}$$

$$\underbrace{y = \frac{C_2}{\sin x}}_{\text{CORJ}}$$

Uzmienniamy stałą C_2:

$$C_2 = C(x)$$

$$y = \frac{C(x)}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{C'(x)\cdot\sin x - C(x)\cos x}{(\sin x)^2}$$

Wstawiamy y' oraz y do równania (A):

$$\frac{C'(x)\sin x - C(x)\cos x}{(\sin x)^2} - \frac{C(x)}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x} = 2\cos x$$

$$\frac{C'(x)}{\sin x} - \cancel{\frac{C(x)\cos x}{(\sin x)^2}} + \cancel{\frac{C(x)\cos x}{(\sin x)^2}} = 2\cos x$$

! Składniki zawierające $C(x)$ upraszczają się w tej metodzie. Jeżeli nie, to szukamy błędu w obliczeniach.

$$\frac{C'(x)}{\sin x} = 2\cos x \quad \Big| \cdot \sin x$$

$$C'(x) = 2\sin x\cos x$$

$$C'(x) = \sin 2x$$

$$C(x) = \int \sin 2x\,dx$$

$$C(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$$

Wstawiamy $C(x)$ do CORJ:

$$y = \frac{\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C\right)}{\sin x}$$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\underbrace{y = -\frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{\sin x} + \frac{C}{\sin x}}_{\text{CORN}}$$

Kiedy stosujemy metodę przewidywań?

Jeżeli funkcja 1° $g(x) = A \cdot e^{kx}$ (jak w przykładach)

2° $g(x) = W_n(x) \cdot e^{kx}$, k - stała

$W_n(x)$ - wielomian stopnia n

3° $g(x) = W_n(x) \cdot \ln(x)$

Równania liniowe rzędu II-go o stałych współczynnikach

II rzędu — zawierają y''

$ay'' + by' + c = 0 \leftarrow$ jednorodne

$ay'' + by' + c = g(x) \leftarrow$ niejednorodne

Sposób rozwiązania

Tworzymy tzw. r-nie charakterystyczne

$$ax^2 + by + c = 0$$

Wyznaczamy x_1, x_2 i w odpowiedni sposób zapisujemy rozwiązanie ogólne, w zależności od liczby pierwiastków r-nie char.

Postać rozwiązania => kolejny wykład.