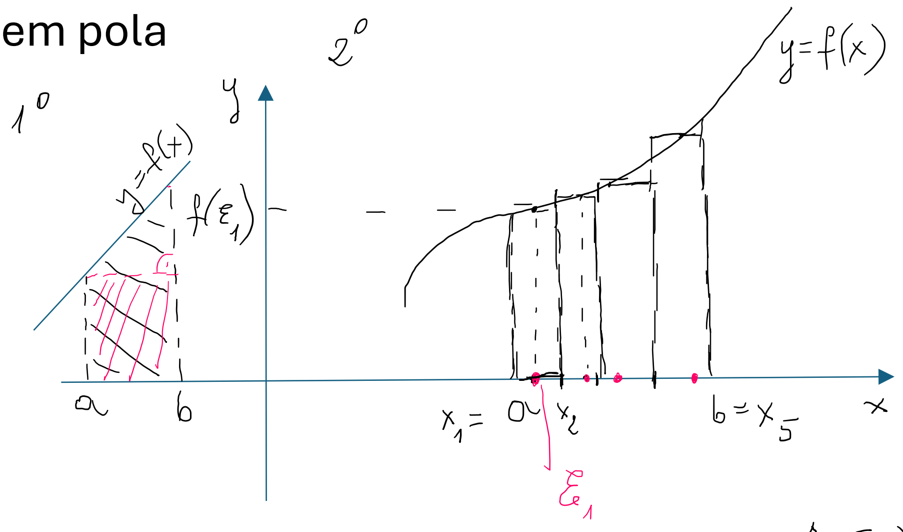
Całka oznaczona

1. Problem pola



$\Delta_K = x_K - x_{K-1}$

punkt $\xi_K \in \langle x_{K-1} ; x_K \rangle$

$\Delta x_K \cdot f(\xi_K)$ ← pole prostokąta

$$\sum_{K=1}^{n} \Delta x_K \cdot f(\xi_K)$$

Całka oznaczona $\int_a^b f(x)dx$ – wyraża pole obszaru pomiędzy wykresem $f(x)$ i osią OX

a – dolna granica całkowania

b – górna granica całkowania

2. Sumy Riemanna

3. Definicja całki oznaczonej

⇒ open.agh

4. Własności

1) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

2) $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$, c – liczba

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, o ile $c \in (a, b)$

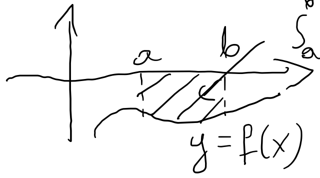
Uwaga 1° $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)$

2° $\int_a^a f(x)dx = 0$

3° Całka oznaczona jest liczbą

4° Jeśli $f(x) < 0$, to $P = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$

$\int_a^b f(x)dx < 0$



5. Tw. Newtona-Leibniza

Jeżeli funkcja $F(x)$ jest f-cją pierwotną (dowolną) f-cji $f(x)$ na przedziale $\langle a, b \rangle$, to

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

6. Schemat obliczania całki oznaczonej $\int_a^b f(x)dx$;

1° wyznaczamy dziedzinę funkcji podcałkowej, i sprawdzamy czy $\langle a, b \rangle \subset D_f$

2° Wyznaczamy f-cję $F(x)$, czyli obliczamy całkę nieoznaczoną $\int f(x)dx = F(x)$

3° Stosujemy wzór Newtona-Leibniza.

7. Błędy: 1° granice całkowania $\to \int_a^b = F(b) - F(a)$

2° całka oznaczona jest liczbą.

3° dziedzina funkcji

Np. $\int_0^5 x \ln x \, dx$, $D_f = (0, \infty)$

całka niewłaściwa

$\int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) dx$, $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

0 1 2

$$\int (x^{-3} - 2x^{-2} + x^{-4}) dx = \frac{x^{-2}}{-2} - 2 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-3}}{-3} + C =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3}}_{} + C = F(x)$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) dx = \left[-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3}\right]\Big|_1^2 \quad \text{N-L}$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{2}{2} - \frac{1}{3 \cdot 8} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{1} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} \Leftarrow \text{Odp.}$$

$\int_1^e x \ln x \, dx$, $D_f = (0, \infty)$

1 e

$$\int x \ln x dx = \left\{ \begin{matrix} f'(x) = x & g(x) = \ln x \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 & g'(x) = \frac{1}{x} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

$$\int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2\right]\Big|_1^e = \frac{1}{2}e^2 \underbrace{\ln e}_{1} - \frac{1}{4}e^2 - \left(\frac{1}{2}\underbrace{\ln 1}_{0} - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$$

$$\int_{-2}^{2} \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$$

$D_f = \mathbb{R}$

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \int x\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

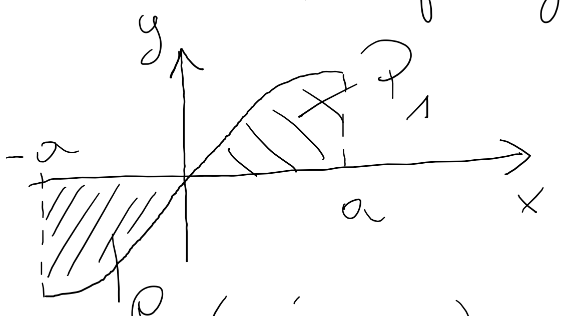
$$\int_{-2}^{2} \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\cdot 4 - \frac{1}{2}\ln(5) - \left(\frac{1}{2}\cdot 4 - \frac{1}{2}\ln 5\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{2}\ln 5 - 2 + \frac{1}{2}\ln 5 = 0$$

8. Funkcja nieparzysta/parzysta na przedziale symetrycznym

- $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ $\quad f(-x) = \frac{-x^3}{1+x^2} = -f(x)$

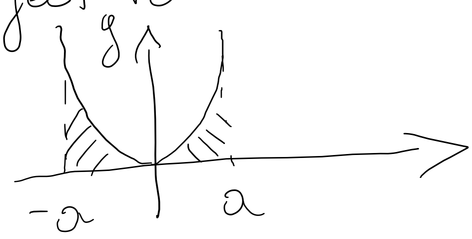
f. nieparzysta



$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

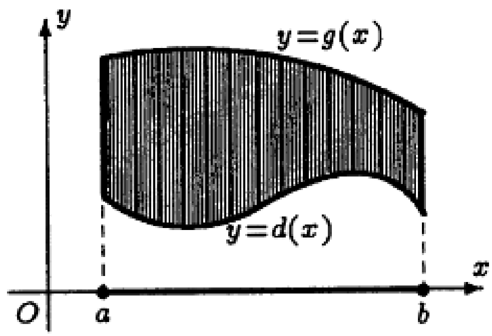
Całka z f. nieparzystej po przedziale symetrycznym wzgl. 0 jest równa zero.

- $f(x) = x^2$ ← f. parzysta



$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

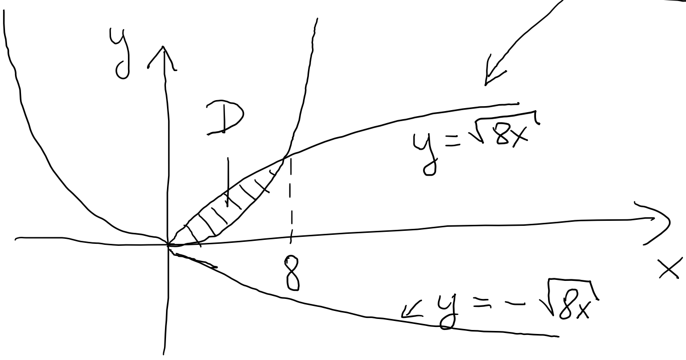
9. Niech funkcje d i g będą ciągłe na przedziale $[a, b]$ oraz niech $d(x) \leqslant g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$. Wtedy pole trapezu krzywoliniowego D ograniczonego wykresami funkcji d i g oraz prostymi $x = a$, $x = b$ wyraża się wzorem:



$$|D| = \int_a^b [g(x) - d(x)]\, dx.$$

Zad. Obliczyć pole obszaru płaskiego ograniczonego parabolami $y^2 = 8x$, $x^2 = 8y$.

$$y = \frac{1}{8}x^2$$



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{8}x^2 \leq y \leq \sqrt{8x} \ \wedge \ 0 \leq x \leq 8\}$$

$$D = \int_0^8 \left(\sqrt{8x} - \frac{1}{8}x^2\right)dx$$

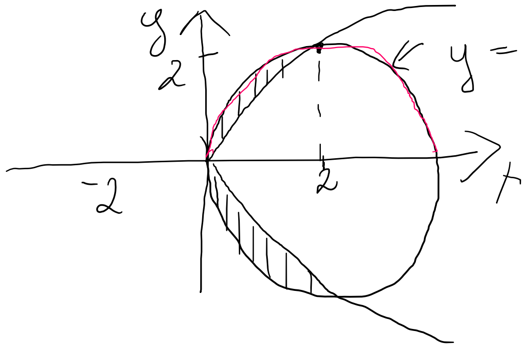
$$\sqrt{8}\int\sqrt{x}\,dx - \frac{1}{8}\int x^2\,dx = \sqrt{8}\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{24}x^3 + C$$

$$D = \left[\frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{24}x^3\right]\Big|_0^8 = \frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{512} - \frac{512}{24} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{64}\cdot\sqrt{8}}{3} - \frac{\cancel{8}^{1}\cdot 64}{\cancel{24}_{3}} = \frac{16\cdot 8}{3} - \frac{64}{3} = \frac{64}{3}[j^2]$$

Zad. Obliczyć pole obszaru płaskiego ograniczonego parabolą $y^2 = 2x$ oraz okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

$$(x-2)^2 + y^2 = 4, \quad O(S(2,0), r=2)$$



$$D = 2\int_0^2 \left(\sqrt{4x-x^2} - \sqrt{2x}\right) dx =$$

$$= 2\Big[\underbrace{\int_0^2 \sqrt{4x-x^2}\, dx}_{\text{ćwiartka koła o } r=2 \;=\; \frac{1}{4}\cdot\pi(2)^2 = \pi} - \sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{x}\, dx \Big]$$

$$D = 2\Big[\pi - \sqrt{2}\int_0^2 x^{\frac{1}{2}} dx\Big] = 2\Big[\pi - \sqrt{2}\Big[\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^2\Big] =$$

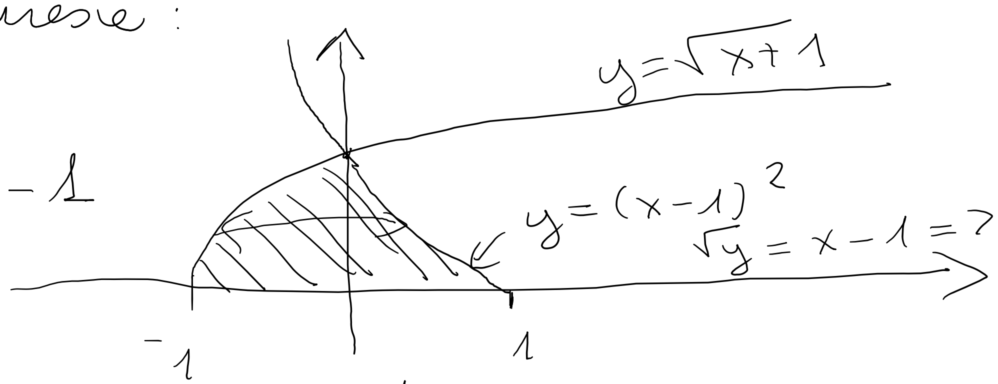
$$= 2\Big[\pi - \sqrt{2}\Big(\tfrac{2}{3}\sqrt{8}\Big)\Big] = \underline{2\Big[\pi - \tfrac{8}{3}\Big]} \,[j^2]$$

Zad. Pole między wykresami

$f(x)=\sqrt{x+1}$ i $g(x)=(x-1)^2$ zaznaczone na wykresie:

$y=\sqrt{x+1}$

$y^2 = x+1 \Rightarrow x = y^2 - 1$



$$D = \int_{-1}^{0} \sqrt{x+1}\, dx + \int_0^1 (x-1)^2 dx =$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{0} + \frac{(x-1)^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\cdot 1 - 0 + 0 + \frac{1}{3} =$$

$$= \underline{1\,[j^2]}$$

Uwaga II sposób

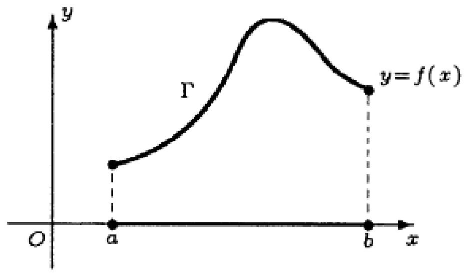
$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^2+1 \le x \le \sqrt{y}+1 \wedge 0\le y\le 1\}$$

$$D=\int_0^1 \left(\sqrt{y}+1-y^2+1\right)dy = \int_0^1\left(-y^2+\sqrt{y}+2\right)dy = \dots$$

Inne zastosowania całki oznaczonej

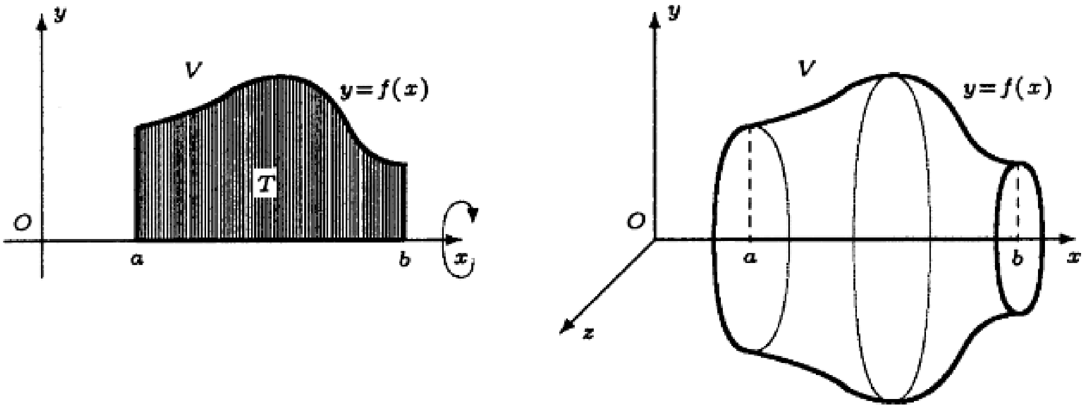
1. Niech funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a,b]$. Wtedy długość krzywej $\Gamma=\{(x,f(x)) : x\in[a,b]\}$ wyraża się wzorem:

$$|\Gamma|=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$



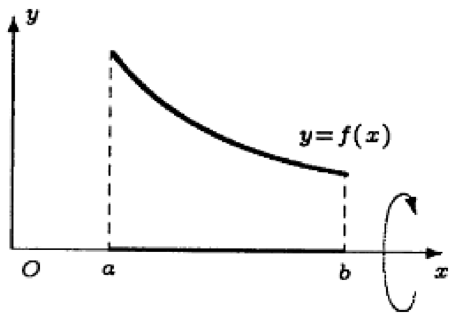
2. Niech funkcja nieujemna f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$. Ponadto niech T oznacza trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem funkcji f, osią Ox oraz prostymi $x = a$, $x = b$. Wtedy objętość bryły V powstałej z obrotu trapezu krzywoliniowego T wokół osi Ox wyraża się wzorem:

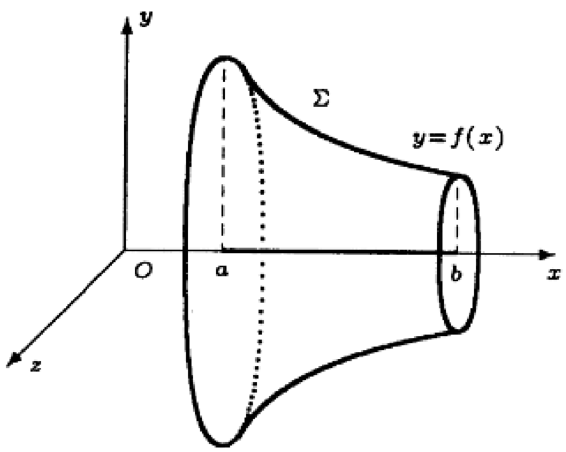
$$|V| = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$



3. Niech funkcja nieujemna f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$. Wtedy pole powierzchni Σ powstałej z obrotu wykresu funkcji f wokół osi Ox wyraża się wzorem:

$$|\Sigma| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$





4. Niech punkt materialny porusza się po płaszczyźnie lub w przestrzeni ze zmienną szybkością $v(t) = |\vec{v}(t)|$. Wtedy droga przebyta przez ten punkt w przedziale czasowym $[t_1, t_2]$ wyraża się wzorem:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt.$$