22.10.2020 L. zespolone: pierwiastkowanie, wielomiany

Zad. 1.

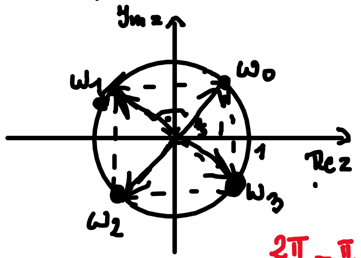
Wyznaczyć pierwiastki 4 st-nia z $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$|z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$

$\cos\varphi=-\frac{1}{2}$, $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ III $\quad \varphi=\pi+\alpha,\ \alpha=\frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow \varphi=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$

$$\boxed{\omega_k=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}$$

$k=0,1,\dots,n-1$



$\omega_0=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\frac{4}{3}\pi+0}{4}+i\sin\frac{\frac{4}{3}\pi+0}{4}\right)$

$\omega_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\omega_1=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\frac{4}{3}\pi+2\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{4}{3}\pi+2\pi}{4}\right)$

$\omega_1=\cos\frac{10}{12}\pi+i\sin\frac{10}{12}\pi=\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$\underset{\varphi_0}{\frac{\pi}{3}} \xrightarrow{+\frac{\pi}{2}} \underset{\varphi_1}{\frac{5}{6}\pi} \xrightarrow{+\frac{\pi}{2}} \underset{\varphi_2}{\frac{8}{6}\pi} \xrightarrow{+\frac{\pi}{2}} \underset{\varphi_3}{\frac{11}{6}\pi}$

$\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$\omega_2=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$\omega_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\omega_3=\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi$

$\omega_3=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

Zad. 2.

Obliczyć pierwiastki 6 stopnia z liczby $z=27$

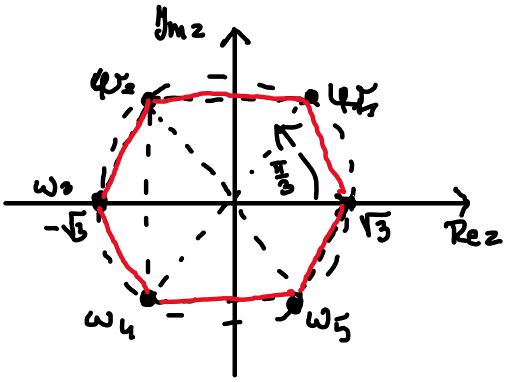
$\{\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_5\}$

$\sqrt[6]{27}=\sqrt[6]{3^3}=(3^3)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{3}{6}}$

$\omega_0=\sqrt{3}\quad \varphi_0=0$

$\omega_1\Rightarrow \varphi_1=\frac{\pi}{3}$

$\varphi_2=\frac{2}{3}\pi$



$\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

$\omega_1=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$\omega_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

$\omega_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

$\omega_3=-\sqrt{3}$

$\omega_4=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$

$\omega_5=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$

Zad. 3.

Wyznaczyć pierwiastki wielomianu zespolonego $W(z)=z^2-z+1$

współczynniki rzeczywiste

$\Delta=(-1)^2-4=1-4=\underbrace{-3}_{3i^2}$

$\sqrt{\Delta}=\{3i,-3i\}$

pierw. zesp.

$z_1=\frac{1-3i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$

$z_2=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

$z,\ \bar{z}$

Zad. 4.

Rozwiązać równanie $z^2+3z+3-i=0$

$\Delta=3^2-4(3-i)=9-12+4i=-3+4i$

$\sqrt{\Delta}=\{\dots,\dots\}$ Trzeba obliczyć pierw. kwadratowy z liczby $-3+4i$

$|z|=5$

$\sqrt{\Delta} = \{..., ...\}$ Trzeba obliczyć pierw. kwadratowy z liczby $-3+4i$

$|z| = 5$
$\cos\varphi = -\frac{3}{5}$
$\sin\varphi = \frac{4}{5}$

Niech $\sqrt{-3+4i} = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

Z definicji pierw. zespolonego:

$$(a+bi)^2 = -3+4i$$

$a^2 + 2abi - b^2 = -3+4i$ ← równość l. zesp.

$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \Rightarrow b = \frac{2}{a} \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 - \left(\frac{2}{a}\right)^2 = -3 \Leftrightarrow a^2 - \frac{4}{a^2} + 3 = 0 \,/\cdot a^2 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases}$

$a^4 + 3a^2 - 4 = 0$

r-nie dwukwadratowe

podst. $a^2 = t$, $t > 0$ $\Rightarrow t^2 + 3t - 4 = 0$

$\Delta_t = 9 + 16 = 25 \Rightarrow$

$\sqrt{\Delta_t} = 5$

$t_1 = \frac{-3-5}{2} < 0$

$t_2 = 1 \Rightarrow a^2 = 1$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$

$\sqrt{\Delta} \Rightarrow$ wzór

$\sqrt{-3+4i} = \{1+2i, -1-2i\}$

$z_1 = \frac{-3-(1+2i)}{2} = -2-i$

$z_2 = \frac{-3+(1+2i)}{2} = -1+i$

Zad. 5 Rozwiązać równanie

$$(*)\ z^4 + 8z^2 + 15 = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

Niech $t = z^2$, $t \in \mathbb{C}$

$t^2 + 8t + 15 = 0$ $\quad (t-t_1)(t-t_2) = 0$

$\Delta_t = 4 \quad \sqrt{\Delta_t} = 2$ $\quad (t+5)(t+3) = 0$

$t_1 = -5 \Rightarrow z^2 = -5 \Rightarrow z_1 = \sqrt{5}i \vee z_2 = -\sqrt{5}i \quad (z_2 = \overline{z_1})$

$t_2 = -3 \Rightarrow z^2 = -3 \Rightarrow z_3 = \sqrt{3}i \vee z_4 = -\sqrt{3}i \quad (z_4 = \overline{z_3})$

Równanie $(*)$ $(z^2+5)(z^2+3) = 0$

$$(z-\sqrt{5}i)(z+\sqrt{5}i)(z-\sqrt{3}i)(z+\sqrt{3}i) = 0$$

Uwaga! Równanie st-nia 5 o wsp. rzeczywistych ma pierwiastki zespolone z_1 i z_2. Jakie są pozostałe rozwiązania?

$z_1, \underbrace{\overline{z_1}}_{z_3}, \underbrace{\overline{z_2}}_{z_4}, z_1, z_5 \in \mathbb{R}$

$z_2 = \overline{z_1}$, z_3, $\overline{z_3}$, $z_5 \in \mathbb{R}$

$z_3, z_4, z_5 \in \mathbb{R}$

Zad. 6.

Wielomian zespolony $W(z) = z^5 - 2z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 5z + 6$, rozłożyć na iloczyn czynników liniowych

	1	-2	-4	4	-5	6
1	1	-1	-5	-1	-6	0
-2	1	-3	1	-3	0	

$(z-1)\underbrace{(z^4 - z^3 - 5z^2 - z - 6)}= 0$

$\cancel{-1}, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6$

	1	-1	-5	-1	-6	0
-2	1	-3	1	-3	0	

$-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6$

$$(z-1)(z+2)(z^3-3z^2+z-3)=0$$
$$(z-1)(z+2)\left[z^2(z-3)+(z-3)\right]=0$$
$$(z-1)(z+2)(z-3)(z^2+1)=0$$
$$z^2=-1$$
$$z_1=i \vee z_2=-i$$
$$z_2=\overline{z_1}$$

(a^2-b^2)

$$W(z)=(z-1)(z+2)(z-3)(z-i)(z+i)$$

Zad. 7.

Wiedząc, że $z_1=1+2i$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(z)=z^4-2z^3+6z^2-2z+5$, wyznaczyć pozostałe pierwiastki.

$z_1=1+2i$

$z_2=\overline{z_1}=1-2i$ (bo $W(z)$ ma współczynniki rzeczywiste)

Sposób I (schemat Hornera)

	1	-2	6	-2	5
$1+2i$		$1+2i$	-5	$1+2i$	-5
	1	$-1+2i$	1	$-1+2i$	0
$1-2i$		$1-2i$	0	$1-2i$	
	1	0	1	0	

$(-1+2i)(1+2i)=(2i-1)(2i+1)=$
$=(2i)^2-1^2=-4-1=-5$

	1	$-1+2i$	1	$-1+2i$
$1-2i$		$1-2i$	0	$1-2i$
	1	0	1	0

$$z^2+1=0$$
$$z^2=-1$$
$$z_3=i \vee z_4=-i$$

Sposób II (dzielenie wielomianów)

Wielomian $W(z)$ dzieli się bez reszty przez:

$$(z-(1+2i))(z-(1-2i))=z^2-(1+2i)z-(1-2i)z+(1+2i)(1-2i)=$$
$$(z-z_1)(z-z_2)$$
$$=z^2-z(1+\cancel{2i}+1-\cancel{2i})+1^2-(2i)^2=$$
$$=z^2-2z+5$$

Wykonujemy dzielenie wielomianów:

$$(z^4-2z^3+6z^2-2z+5):(z^2-2z+5)=z^2+1$$
$$\underline{-z^4+2z^3-5z^2}$$
$$= \quad = \quad z^2-2z+5$$
$$-z^2+2z-5$$

$$\begin{array}{l} \quad z^2 - 2z + 5 \\ -z^2 + 2z - 5 \\ \hline \quad - \quad = \quad = \end{array}$$

$z^2 + 1 = 0$

$z^2 = -1$

$z_3 = i \vee z_4 = -i$

Zad. 8.

Rozłożyć na czynniki liniowe wielomian zespolony

$$W(x) = -x^4 + x^3 - x^2 + x \quad , \quad x \in \mathbb{C}$$

$$x(-x^3 + x^2 - x + 1) = 0$$

$$x(x^2(-x+1) + (-x+1)) = 0 \qquad x^2 a + a$$

$$x(-x+1)(x^2+1) = 0 \qquad a(x^2+1)$$

$$x(1-x)(x-i)(x+i) = 0$$

$$W(x) = x(1-x)(x-i)(x+i)$$