Funkcje 2 zmiennych

$z = f(x,y)$

Płaszczyzna : $Ax + By + Cz + D = 0$

$$z = \frac{D - Ax - By}{C}$$

$$f(x,y) = \frac{D - Ax - By}{C}$$

$$(x,y) \xrightarrow{f} z = f(x,y)$$

(x,y) ↓ na płaszczyźnie Oxy

$z = f(x,y)$ ↓ punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

Na przykład:

$f(x,y) = \underbrace{x^2}_{\mathbb{R}} + \underbrace{y^2}_{\mathbb{R}}$

$D_f = \mathbb{R}^2$ ↓ cała płaszczyzna xOy

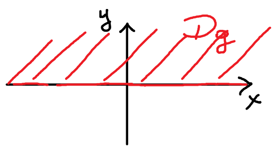
$g(x,y) = x^2 + \sqrt{y}$

$x \in \mathbb{R}$ $\quad y \geq 0$

$D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \wedge y \geq 0\}$

naszkicować zbiór D_g

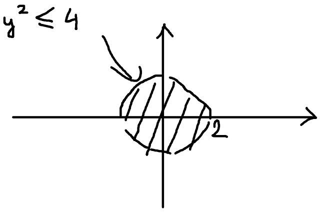
$f(x) = \dots$
$D = \mathbb{R}$



$h(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

D_h: $4 - x^2 - y^2 \geq 0$

$x^2 + y^2 \leq 4$



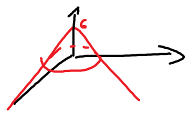
Zadanie

Naszkicować powierzchnię

a) $z = 2 - (x^2 + y^2)$ (paraboloida „odwrócona" o wierzchołku w $(0,0,2)$)

b) $z^2 = x^2 + y^2$ powierzchnia stożkowa

c) $z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$



Pochodne cząstkowe f-cji dwóch zmiennych

$$f(x,y) = x^5 - 3y^3 + 2xy - 3x^2y + xy^4 - 3$$

Pochodne cząstkowe I rzędu f-cji $f(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = (x^5)'_x - \underbrace{(3y^3)'_x}_{0} + (2xy)'_x - (3x^2y)'_x + (xy^4)'_x - \underbrace{(3)'_x}_{0} =$$

(y – stała)

$$= 5x^4 - 2y - 6xy + y^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = \underbrace{(x^5)'_y}_{0} - (3y^3)'_y + (2xy)'_y - (3x^2y)'_y + (xy^4)'_y - \underbrace{(3)'_y}_{0} =$$

(x – stała)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \underset{(x-\text{stała})}{f'_y} = \underbrace{(x^5)'_y}_{0} - (3y^3)'_y + (2xy)'_y - (3x^2y)'_y + (xy^4)'_y - \underbrace{(3)'_y}_{0} =$$

$$= -9y^2 + 2x - 3x^2 + 4xy^3$$

Zad. 1

Wyznaczyć pochodne cząstkowe rzędu $\underline{\text{I}}$ funkcji:

a) $f(x,y) = xy^3 + 3x^2 + 2y^5 + \frac{x}{y}$, $y \neq 0$

$$f'_x = y^3 + 6x + 0 + \frac{1}{y} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \left(\frac{1}{y}\cdot x\right)'_x = \frac{1}{y}\cdot 1 = \frac{1}{y}$$

$$f'_y = 3xy^2 + 0 + 10y^4 - \frac{x}{y^2} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{x}{y}\right)'_y = \left(x\cdot\frac{1}{y}\right)'_y = x\cdot\left(\frac{1}{y}\right)'_y = x\left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2}$$

b) $f(x,y) = x \cdot \ln(x+y+1)$, $x+y+1 > 0$

$$f'_x = \underbrace{(x)'_x}_{1} \cdot \ln(x+y+1) + x\cdot(\ln(x+y+1))'_x = \ln(x+y+1) + x\cdot\frac{1}{x+y+1}\cdot(x+y+1)'_x =$$

$$= \ln(x+y+1) + \frac{x}{x+y+1}$$

$$f'_y = x\cdot\frac{1}{x+y+1}\cdot(x+y+1)'_y = \frac{x}{x+y+1}$$

c) $f(x,y) = xye^{3x}$

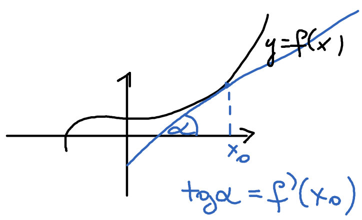
$$f'_x = (xy)'_x\, e^{3x} + xy\cdot\left(e^{3x}\right)'_x = ye^{3x} + xye^{3x}\cdot 3 = ye^{3x}(1+3x)$$

$$f'_y = xe^{3x}$$

d) $f(x,y) = \frac{x+2y}{x-2y}$

$$f'_x = \frac{\overbrace{(x+2y)'_x}^{1}(x-2y) - (x+2y)\overbrace{(x-2y)'_x}^{1}}{(x-2y)^2} = \frac{x-2y-x-2y}{(x-2y)^2} = \frac{-4y}{(x-2y)^2}$$

$$f'_y = \frac{\overbrace{(x+2y)'_y}^{2}(x-2y) - (x+2y)\overbrace{(x-2y)'_y}^{-2}}{(x-2y)^2} = \frac{2x-4y+2x+4y}{(x-2y)^2} = \frac{4x}{(x-2y)^2}$$



$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$

Zad. 2.

Wyznaczyć pochodne (wszystkie) rzędu $\underline{\text{II}}$ funkcji.

a) $f(x,y) = 3x^2y - x^2 + y^2 + 2x - 5$

$$f'_x = 6xy - 2x + 2$$

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = (6xy - 2x + 2)'_x = 6y - 2 \quad \left(\text{ozn. } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$$

$$f'_y = 3x^2 + 2y$$

$$f''_{yy} = (f'_y)'_y = (3x^2 + 2y)'_y = 2$$

pochodne $\underline{\text{II}}$ rzędu czyste (tylko po x lub y)

Pochodne mieszane:

f''_{xy} oraz f''_{yx}

równe sobie.

f''_{xy} oraz f''_{yx}

równe sobie

$$f''_{xy} = (f'_y)'_x = (3x^2+2y)'_x = \underline{\underline{6x}} \quad \text{oraz} \quad f''_{yx} = (f'_x)'_y = (6xy-2x+2)'_y = \underline{\underline{6x}}$$

b) $f(x,y) = 5x^4y^6 + xe^{2y}$

$f'_x =$ $\qquad\qquad$ f''_{xx}

$f'_y =$ $\qquad\qquad$ f''_{yy}

$f''_{xy} = f''_{yx} =$

Ekstrema lokalne f-cji dwóch zmiennych

Wyznaczyć ekstrema lokalne f-cji.

a) $f(x,y) = 3x^2 + 3xy - y^2 - 15x$

$D_f = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

WK: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 6x+3y-15=0 \;/ :3 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-2y=0 \end{cases} \Big|\; 2$

$$\begin{array}{r} 4x+2y=10 \\ +\;\; 3x-2y=0 \\ \hline 7x=10 \end{array}$$

$x = \frac{10}{7} \Rightarrow y = 5-2x$

$y = 5 - \frac{20}{7} = \frac{15}{7}$

$\begin{cases} x = \frac{10}{7} \\ y = \frac{15}{7} \end{cases}$ ← punkt podejrzany o istnienie ekstremum (stacjonarny)

$P = \left(\frac{10}{7}, \frac{15}{7}\right)$

Sprawdzimy czy $W = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0$ dla p-tu P.

Jeżeli $W(P) > 0 \Rightarrow$ istnieje ekstremum w P (jeszcze nie wiemy jakiego typu max czy min)

Jeżeli $W(P) < 0 \Rightarrow$ nie istnieje ekstremum w P

Jeżeli $W(P) = 0 \Rightarrow$? ekstremum może istnieć ale nie musi

$f''_{xx} = (f'_x)'_x = (6x+3y-15)'_x = 6$

$f''_{yy} = (f'_y)'_y = (3x-2y)'_y = -2$ $\qquad \Rightarrow \qquad W = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -12-9 = -21 < 0$

$f''_{xy} = f''_{yx} = (6x+3y-15)'_y = 3$

Nie ma ekstremum w p-cie P

b) $f(x,y) = 2y^3x + x^2 + 3y^2$

A

$$\begin{cases} f'_x = 2y^3 + 2x = 0 \\ f'_y = 6y^2x + 6y = 0 \quad /:6 \end{cases}$$

$y(xy+1) = 0$

$y = 0 \quad \vee \quad xy = -1$

$y = -\frac{1}{x}$

$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -\frac{2}{x^3} + 2x = 0 \\ \vdots \end{cases}$

$(1,-1) \quad (-1,1)$

$$\underbrace{P_1 = (0,0),\ P_2 = (1,-1),\ P_3 = (-1,1)}_{\text{p-ty stacjonarne}}$$

$\vdots$