R-nia liniowe I rzędu

$$\boxed{y' + p(x)\cdot y = q(x)}$$

1° RLJ: $y' + p(x)\cdot y = 0$

o rozdzielonych zmiennych => CORJ

2° RLN: $y' + p(x)\cdot y = q(x)$

- uzmiennianie stałej
- przewidywanie ($p(x)$ - liczba)

Równanie Bernoulliego

$$y' + p(x)y = q(x)\cdot y^s, \quad s \in \mathbb{R} - \{0,1\}$$

Dla $s=0$: $y^s = 1$ => r-nie liniowe

Dla $s=1$: $y' + [p(x) - q(x)]y = 0$ r-nie liniowe jednorodne

Podstawiamy: $\boxed{v = y^{1-s}}$

Przykład

a) $y' + xy = xy^3$, $s=3$

$$v = y^{-2} \Rightarrow v'(x) = -2y^{-3}\cdot y'(x)$$

$$v' = -2y^{-3}\cdot y'$$

R-nie a) mnożymy obustronnie przez $-2y^{-3}$

$$-2y^{-3}y' - 2y^{-3}\cdot xy = -2y^{-3}\cdot x\cdot y^3$$

$$\underbrace{-2y^{-3}y'}_{v'} - 2x\underbrace{y^{-2}}_{v} = -2x$$

$$(*)\quad v' - 2xv = -2x$$

r-nie liniowe niejednorodne
ze względu na $v(x)$

RLJ: $v' - 2xv = 0$

$$\frac{dv}{dx} = 2xv \iff \int\frac{dv}{v} = \int 2x\,dx$$

$$\ln|v| = x^2 + C$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{v = C\cdot e^{x^2}}_{\text{CORJ}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

RLN: $(*)\ v' - 2xv = -2x$

uzmienniam stałą C: $C = C(x)$

$$v = C(x)\cdot e^{x^2}$$

$$v' = C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2}$$

$$(*)\quad \underbrace{C'(x)e^{x^2} + \cancel{2xC(x)e^{x^2}}}_{v'} - 2x\cdot\underbrace{\cancel{C(x)e^{x^2}}}_{v} = -2x$$

$$C'(x)e^{x^2} = -2x$$

$$C'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$C(x) = \int -2xe^{-x^2}dx = e^{-x^2} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

wracamy do $v = (e^{-x^2} + C_1)\cdot e^{x^2}$

$$\underbrace{v = 1 + C_1e^{x^2}}_{\text{CORN}(*)}$$

$$y^{-2} = 1 + C_1e^{x^2}$$

$$\frac{1}{y^2} = 1 + C_1e^{x^2}$$

$$y^2 = \frac{1}{1 + C_1e^{x^2}}$$

b) $y' - \frac{xy}{2(x^2-1)} = \frac{x}{2y}$, z war. początkowym $y(2)=1$

$y \neq 0$ $\qquad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

$\frac{1}{2}xy^{-1}$, $s=-1$

Podstawienie $v = y^2$

$v' = 2yy'$

Mnożymy b) dwustronnie przez $2y$

$$\underbrace{2yy'} - \frac{x}{x^2-1}y^2 = x$$

$$(*)\quad v' - \frac{x}{x^2-1}v = x$$

r-nie liniowe

RJ: $\frac{dv}{dx} = \frac{x}{x^2-1}v$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{x}{x^2-1}dx$$

$$\ln|v| = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$$

$\ln|v| = \ln\sqrt{x^2-1}\cdot C_1$, $C_1 > 0$

$|v| = C_1\sqrt{x^2-1}$, $x^2-1>0$

$\underline{v = C_2\sqrt{x^2-1}}$ CORJ

Niech $v = C(x)\sqrt{x^2-1}$

$$v' = C'(x)\sqrt{x^2-1} + C(x)\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$(*)\quad \underbrace{C'(x)\sqrt{x^2-1} + \cancel{C(x)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}}_{v'} - \cancel{\frac{x}{x^2-1}\underbrace{C(x)\sqrt{x^2-1}}_{v}} = x$$

$$-\frac{xC(x)\sqrt{x^2-1}}{x^2-1} = -\frac{xC}{\sqrt{\ }}$$

$C'(x)\sqrt{x^2-1} = x \Rightarrow C'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$$C(x) = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \sqrt{x^2-1} + C$$

$v = (\sqrt{x^2-1} + C)\sqrt{x^2-1}$, $x^2-1>0$

$v = x^2-1 + C\sqrt{x^2-1}$

$y^2 = x^2-1 + C\sqrt{x^2-1}$ $\land\ x=2 \land\ y=1$

$$1^2 = 2^2 - 1 + C\sqrt{2^2-1}$$

$$-2 = C\sqrt{3} \Rightarrow C = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Odp: $y^2 = x^2 - 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2-1}$ ← całka szczególna

---

Równania rzędu II

I Równania postaci $F(x, y', y'') = 0$ (bez „y")

wtedy podstawiamy:

$$y' = u(x)$$

$$y'' = u'(x) = \frac{du}{dx}$$

Przykład

a) $(1+x)y'' = y' \Rightarrow (1+x)\frac{du}{dx} = u$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{1+x} \quad \boxed{u \neq 0} \quad ! \; u = 0 \text{ rozwiązanie}$$

$$\ln|u| = \ln|1+x| + C$$

$$\ln|u| = \ln|1+x| + \ln C_1, \quad C_1 > 0$$

$$\ln|u| = \ln C_1|1+x|$$

$$|u| = C_1|1+x|$$

$$u = \underbrace{\pm C_1}_{C_2 \neq 0}(1+x)$$

$$u = C_2(1+x)$$

$$y' = C_2(1+x)$$

$$\frac{dy}{dx} = C_2(1+x) \Rightarrow dy = C_2(1+x)dx$$

$$dy = (C_2 + C_2x)dx$$

$$\int dy = \int C_2 dx + C_2\int x dx$$

$$y = C_2 x + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3$$

b) $$y'' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} y' &= u \\ y'' &= u' \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \quad \Big| \cdot dx$$

$$du = \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\int du = \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$u = \operatorname{arctg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{arctg} x + C \quad \Big| \cdot dx$$

$$dy = \operatorname{arctg} x\, dx + C\, dx$$

$$\int dy = \underbrace{\int \operatorname{arctg} x\, dx}_{\text{przez części}} + C\int dx$$

$$\int 1 \cdot \operatorname{arctg} x\, dx = \left\{ \begin{matrix} f'(x) = 1 & g(x) = \operatorname{arctg} x \\ f(x) = x & g'(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{matrix} \right\} =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C_1$$

$$y = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + Cx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

II Równania liniowe rzędu II o współczynnikach stałych

$$(**)\quad ay'' + by' + cy = f(x), \quad b, c \in \mathbb{R}, \; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Zajmiemy się równaniem jednorodnym: Podstawiamy $y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx} \Rightarrow y'' = r^2 e^{rx}$

$(**)\quad a r^2 e^{rx} + b r e^{rx} + c e^{rx} = 0 \quad | : e^{rx}$

$e^{rx} > 0$

$$ar^2 + br + c = 0$$

równanie charakterystyczne

1° Jeżeli $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

wtedy CORJ: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

2° Jeżeli $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow r_1 = r_2$, $r_1 \in \mathbb{R}$

wtedy CORJ: $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$

3° Jeżeli $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow r_1 = \alpha + \beta i$ $\quad r_1 = \overline{r_2}$

$r_2 = \alpha - \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

wtedy CORJ: $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Przykład

a) $y'' + y = 0$

r-nie char. $r^2 + 1 = 0$

$r^2 = -1$

$r_1 = -i$, $r_2 = i$ $\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$

CORJ: $y = e^{0 \cdot x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

b) $y'' + 2y' + y = 0$

r. char. $r^2 + 2r + 1 = 0$

$(r+1)^2 = 0$

$r_1 = r_2 = -1$

CORJ: $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x}$

Równania niejednorodne będziemy rozwiązywać metodą przewidywań lub uzmienniania stałych.

<u>Metoda przewidywań</u> (zasady podobne jak dla r-ń liniowych I rzędu)

c) (***) $y'' + 9y = x\cos x$

1° RLJ: $y'' + 9y = 0$

$$r^2 + 9 = 0$$

$$r^2 = -9$$

$$\left.\begin{matrix} r_1 = 3i \\ r_2 = -3i \end{matrix}\right\} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 3 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{y = C_1\cos 3x + C_2 \sin 3x}_{CORJ}$$

2° przewiduję całkę szczególną:

$$y = (Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x$$

$$y' = A\cos x + (Ax+B)(-\sin x) + C\sin x + (Cx+D)\cos x$$

$$y' = (Cx+A+D)\cos x + (C-B-Ax)\sin x$$

$$y'' = C\cos x + (Cx+A+D)(-\sin x) + (-A)\sin x + (C-B-Ax)\cos x$$

$$y'' = (2C-B-Ax)\cos x + (-Cx-D-2A)\sin x$$

(***) $y'' + 9y = x\cos x$

(***) $(2C-B-Ax)\cos x + (-Cx-D-2A)\sin x + 9(Ax+B)\cos x + 9(Cx+D)\sin x =$
$= x\cos x$

$$\begin{matrix} \cos x: \\ \sin x: \end{matrix} \begin{cases} 2C - B - Ax + 9Ax + 9B = x \\ -Cx - D - 2A + 9Cx + 9D = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \overset{1}{8A}x + 8B - 2C = x \\ \underset{0}{8C}x - 2A + 8D = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8D - 2A = 0 \\ 8B - 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow B = 0 \quad C = 0$$

$$A = \frac{1}{8}$$

$$8D = 2A$$

$$D = \frac{1}{32}$$

$$\underbrace{y = \frac{1}{8}x\cos x + \frac{1}{32}\sin x}_{CSRN}$$

Odp: CORN = CORJ + CSRN: $y = \frac{1}{8}x\cos x + \frac{1}{32}\sin x + C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$