

Liczby zespolone – zadania

1. Podać część rzeczywistą i urojoną następujących liczb zespolonych :

a) $(3 - 2i)(i - 1) + (2 - 3i)^2$, d) $(3 + i)^3 + (3 - i)^3$,

b) $\frac{-2}{(3-5i)}$, e) $\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$,

c) $\frac{i-3}{1+\sqrt{2}i}$, f) $\frac{(5+i)(7-6i)}{(i-3)^2}$.

2. Zapisać podane liczby zespolone w postaci trygonometrycznej

a) $-2 - 2i$, e) $-\sqrt{12} - 2i$,

b) $1 - i\sqrt{3}$, f) $-\sqrt{3} - \sqrt{3}i$,

c) $4i$, g) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

d) -2 h) $\sqrt{15} - \sqrt{5}i$.

3. Za pomocą wzoru de Moivre’a wykonać potęgowanie liczb zespolonych

a) $(-1 + i)^7$, e) $\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$,

b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{11}$, f) $(\sqrt{2}i - \sqrt{2})^{44}$,

c) $(1 + i)^{2024}$, g) $(\sqrt{3} - i)^{60}$.

d) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{16}$,

4. Obliczyć pierwiastki liczb zespolonych

a) $\sqrt[3]{-1}$, e) $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i}$

b) $\sqrt[3]{i}$, f) $\sqrt[3]{8i}$,

c) $\sqrt[3]{1-i}$, g) $\sqrt[6]{-27}$,

d) $\sqrt[4]{2 - i\sqrt{12}}$, h) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

Odpowiedzi

1. a) $-6 - 7i$; b) $-\frac{3}{17} - \frac{5}{17}i$; c) $\frac{\sqrt{2}-3}{3} + i\frac{1+3\sqrt{2}}{3}$; d) 36 ; e) $-\frac{1}{25} - \frac{32}{25}i$; f) $\frac{466+62i}{100}$;

2. a) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$; b) $2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$; c) $4\left(\cos\frac{1}{2}\pi + i\sin\frac{1}{2}\pi\right)$;

d) $2(\cos \pi + i \sin \pi)$; e) $4\left(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi\right)$; f) $\sqrt{6}\left(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi\right)$.

3. a) $-8i - 8$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; c) 2^{1012} ; d) 1 ; e) -32 ; f) -2^{44} ; g) 2^{60} .

4. a) $\left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$; b) $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i\right\}$;

c) $\left\{\sqrt[6]{2}\left(\cos \frac{7}{12}\pi + i \sin \frac{7}{12}\pi\right), \sqrt[6]{2}\left(-\cos \frac{1}{12}\pi + i \sin \frac{1}{12}\pi\right), \sqrt[6]{2}\left(\cos \frac{1}{12}\pi - i \sin \frac{1}{12}\pi\right)\right\}$;

d) $\left\{\sqrt{2}\left(\cos \frac{5}{12}\pi + i \sin \frac{5}{12}\pi\right), \sqrt{2}\left(-\cos \frac{1}{12}\pi + i \sin \frac{1}{12}\pi\right),\right.$

$\left.\sqrt{2}\left(-\cos \frac{5}{12}\pi - i \sin \frac{5}{12}\pi\right), \sqrt{2}\left(\cos \frac{1}{12}\pi - i \sin \frac{1}{12}\pi\right)\right\}$;

e) $\left\{\sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{1}{24}\pi + i \sin \frac{1}{24}\pi\right), \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{13}{24}\pi + i \sin \frac{13}{24}\pi\right), \sqrt[4]{2}\left(-\cos \frac{1}{24}\pi - i \sin \frac{1}{24}\pi\right),\right.$

$\left.\sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{37}{24}\pi + i \sin \frac{37}{24}\pi\right)\right\}$;

f) $\{\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i\}$;

g) $\left\{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \sqrt{3}i, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\sqrt{3}i, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$;

h) $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.