Wykład 13

Matematyka 1

Politechnika Rzeszowska

Styczeń 2025

1. Pochodne wyższych rzędów

Definicja 1.1 (pochodna właściwa n-tego rzędu funkcji)

Pochodną właściwą n-tego rzędu funkcji f(x) w punkcie x_0 definiujemy następująco:

$$f^{(n)}(x_0) := [f^{(n-1)}]'(x_0) \quad \text{dla } n \geq 2,$$

$f''(x_0) = (f'(x_0))'$

$f'''(x_0) = [f''(x_0)]'$

gdzie $f^{(1)}(x_0) := f'(x_0)$ oraz $f^{(0)}(x_0) := f(x_0)$.

Funkcję określoną na zbiorze A, której wartości w punktach $x \in A$ są równe $f^{(n)}(x)$, nazywamy pochodną n – tego rzędu funkcji f na zbiorze A i oznaczamy przez $f^{(n)}$.

Piszemy także f'', f''', f^{IV}, itd. Czasami stosuje się również oznaczenia $\dot{f}$, $\ddot{f}$, …

Uwaga

Dla istnienia n-tej pochodnej funkcji f w punkcie x_0 konieczne jest istnienie pochodnej $f^{(n-1)}(x_0)$ i w związku z tym wszystkich pochodnych niższych rzędów na pewnym otoczeniu punktu x_0.

Jako oznaczenie n – tej pochodnej funkcji w punkcie x_0 stosujemy również zapis

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x_0). \qquad \frac{\partial^n f}{\partial x^n}$$

Przykład

f(x) = x lnx

$$f'(x) = (x\ln x)' = \overbrace{(x)'}^{1}\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f''(x) = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x}$$

$$f'''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$f^{IV}(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = (-x^{-2})' = -1\cdot(x^{-2})' = -1\cdot(-2x^{-3}) = \frac{2}{x^3}$$

$$f^{V}(x) = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = 2\cdot(x^{-3})' = 2\cdot(-3x^{-4}) = \frac{-6}{x^4}$$

⋮

2. Tożsamości zmieniające rodzaje nieoznaczoności

	Nieoznaczoność	Stosowana tożsamość	Otrzymana nieoznaczoność
1.	$0 \cdot \infty$	$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$	$\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$ $\Rightarrow H$
2.!	$\infty - \infty$	$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}$	$\frac{0}{0}$ $\Rightarrow H$
3.	1^∞, ∞^0, 0^0	$f^g = e^{g \ln f}$	$0 \cdot \infty$

Przykłady

Obliczyć granice

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$;

a) $$\lim_{x\to\infty} \underbrace{x^2}_{f}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{g} \underset{\text{wzór 1.}}{\overset{[\infty\cdot 0]}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \underset{H}{\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \underset{H}{\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \left[\frac{2}{\infty}\right] = 0$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x \underset{\text{wzór 3.}}{\overset{[1^\infty]}{=}} \lim_{x\to\infty} e^{x \ln \frac{2}{\pi}\cdot \operatorname{arctg} x} = e^{-\frac{2}{\pi}}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot \ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right) \underset{\text{wzór 1}}{\overset{[\infty\cdot 0]}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)}{\frac{1}{x}} \underset{H}{\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left[\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\cancel{\frac{2}{\pi}}\operatorname{arctg} x}\cdot\cancel{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}}_{\to\frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{\frac{-x^2}{1+x^2}}_{\to -1} = -\frac{2}{\pi}$$

Twierdzenie 2.1 (drugi warunek wystarczający istnienia ekstremum)

Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(x_0) = 0$;

2. $f''(x_0) < 0$;

wtedy w punkcie x_0 ma maksimum lokalne właściwe.

Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(x_0) = 0$;
2. $f''(x_0) > 0$;

wtedy w punkcie x_0 ma minimum lokalne właściwe.

Przykład

$f(x) = x(x-4)^3$. $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x(x-4)^3)' = (x-4)^3 + x \cdot 3(x-4)^2 \cdot 1 = (x-4)^2(x-4+3x)$$

$$f'(x) = (x-4)^2(4x-4)$$

Wyznaczamy p-ty podejrzane o istnienie ekstremum (krytyczne, stacjonarne)

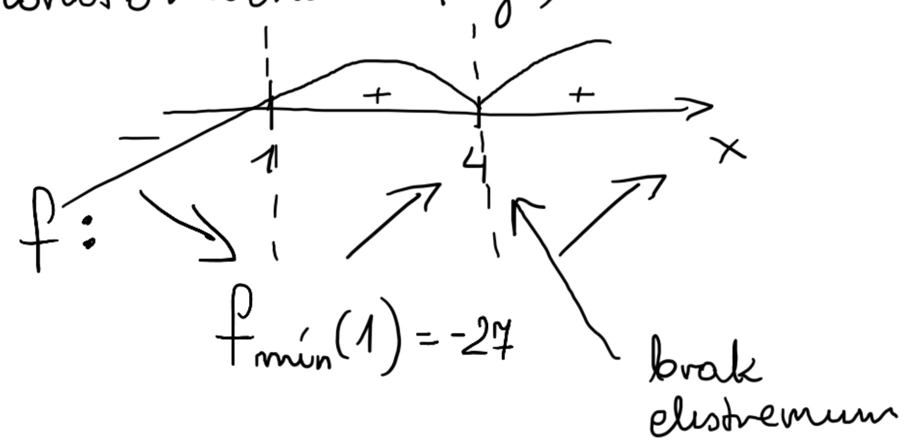
$$f'(x) = 0$$

$$4(x-4)^2(x-1) = 0 \iff x=4 \vee x=1$$

I sposób

Badamy znak pochodnej f' (monotoniczność f-cji)

$$f'(x) = 4(x-4)^2(x-1)$$



$f \nearrow$ dla $x \in (1,4)$, $x \in (4,\infty)$

$f \searrow$ dla $x \in (-\infty,1)$

II sposób

Obliczymy $f''(x)$ w punktach $x=1$, $x=4$

$$f''(x) = [f'(x)]' = [4\underbrace{(x-4)^2}_{f}\underbrace{(x-1)}_{g}]' = 4[2(x-4)(x-1)+(x-4)^2] = 4(x-4)[2x-2+x-4] =$$

$$= 4(x-4)(3x-6)$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

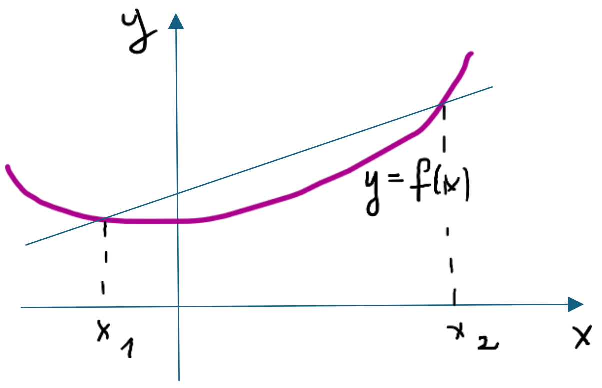
Dla $x=1$: $f''(1) = 4 \cdot (-3) \cdot (-3) = 36 > 0 \Rightarrow$ w p-cie $x=1$ minimum lokalne

Dla $x=4$: $f''(4) = 0 \Rightarrow$ brak ekstremum

Funkcje wypukłe i wklęsłe

Definicja 3.1 (funkcja ściśle wypukła)

Funkcja f jest wypukła na przedziale (a, b), gdzie $-\infty \le a \le b \le \infty$, jeżeli każdy odcinek siecznej wykresu leży ponad fragmentem wykresu położonym między punktami, przez które przechodzi sieczna.

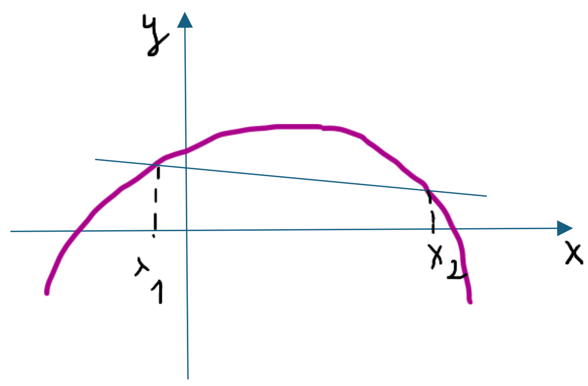


Funkcję wypukłą nazywa się również funkcją wypukłą w dół.

Oznaczenie: $\cup$

Definicja 3.2 (funkcja ściśle wklęsła)

Funkcja f jest wklęsła na przedziale (a, b), gdzie $-\infty \le a \le b \le \infty$, jeżeli każdy odcinek siecznej wykresu leży pod fragmentem wykresu położonym między punktami, przez które przechodzi sieczna.



Funkcję wklęsłą nazywa się również funkcją wypukłą w górę.

Oznaczenie: $\cap$

Twierdzenie 3.1 (warunek wystarczający wypukłości)

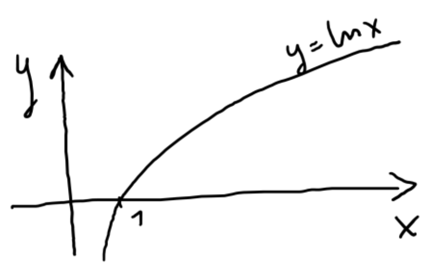
Jeżeli $f''(x) > 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest ściśle wypukła na (a, b).

Oczywiście, jeżeli $f''(x) < 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest ściśle wklęsła na (a, b).

Przykłady

a) $f(x) = \ln x$, b) $f(x) = x^3$

$D_f = (0, \infty)$



$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

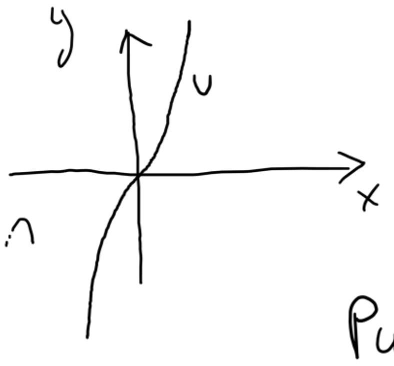
$f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, więc $f''(x) < 0$ dla $x \in D_f \Rightarrow$ funkcja jest wklęsła w swojej dziedzinie $(\cap)$

b) $f(x) = x^3 \quad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x \Rightarrow$ $f''(x) > 0$ dla $x > 0 \Rightarrow f$ wypukła $(\cup)$

$f''(x) < 0$ dla $x < 0 \Rightarrow f$ wklęsła $(\cap)$



W p-cie $(0,0)$ funkcja zmienia rodzaj wypukłości (z wklęsłej na wypukłą)

Punkt $(0,0)$ jest p-tem przegięcia (p.p.) wykresu funkcji $f(x) = x^3$

3. Punkty przegięcia wykresu funkcji

Definicja 4.1

Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu x_0. Ponadto niech funkcja f ma tam pochodną. Punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia (w skrócie p.p.) wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $r > 0$ taka, że funkcja f jest ściśle wypukła na $S_-(x_0, r)$ oraz ściśle wklęsła na $S_+(x_0, r)$ lub odwrotnie.

Twierdzenie 4.1 (warunek konieczny p.p.)

Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. Punkt $(x_0, f(x_0))$ jest jej punktem przegięcia;
2. Istnieje $f''(x_0)$,

to $f''(x_0) = 0$.

Przykład

$f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 \quad D_f = \mathbb{R}$

Znajdziemy p-ty przegięcia wykresu funkcji $f(x)$.

1) $f'(x) = (x^4 - 12x^3 + 48x^2)' = 4x^3 - 36x^2 + 96x$

2) $f''(x) = (f'(x))' = 12x^2 - 72x + 96 = 12(x^2 - 6x + 8)$

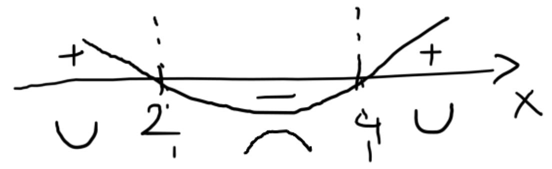
3) WK istnienia p.p. $\quad f''(x) = 0$

$$12(x^2 - 6x + 8) = 0 \quad /:12$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = 2$$

4) Badamy znak $f''(x)$



funkcja jest wypukła ($\cup$) dla $x \in (-\infty, 2)$, $x \in (4, \infty)$

funkcja jest wklęsła ($\cap$) dla $x \in (2, 4)$

P-ty przegięcia wykresu funkcji: $(2, 112)$, $(4, 256)$

4. Badanie przebiegu zmienności funkcji

1. Wyznaczenie dziedziny funkcji.
2. Zbadanie własności funkcji takich, jak: parzystość (nieparzystość), okresowość, miejsca zerowe, ciągłość.
3. Obliczenie granic funkcji na krańcach dziedziny.
4. Znalezienie asymptot pionowych i ukośnych.
5. Wyznaczenie przedziałów monotoniczności i ewentualnych ekstremów.
6. Wyznaczenie przedziałów wklęsłości (wypukłości) i ewentualnych punktów przegięcia wykresu.
7. Sporządzenie wykresu funkcji.

5. Funkcje pierwotne, całki nieoznaczone

Definicja 6.1

Funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I, jeżeli

$$F'(x) = f(x)$$

$\left(f(x) = 1, \ F(x) = x \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow F(x) = \operatorname{arctg} x \right)$

dla każdego $x \in I$.

Uwaga

Funkcje pierwotne funkcji: e^{-x^2}, $\frac{\sin x}{x}$, $\cos(x^2)$, $\sqrt{1+x^3}$ nie są funkcjami elementarnymi.

Przykłady

Dla $f(x) = \cos x$, funkcją pierwotną jest $F(x) = \sin x$, ale również np. $F(x) = \sin x + 8$.

Dla $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \ln x$, $x \in (0, \infty)$.

$F'(x) = \cos x$

Twierdzenie 6.1

Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. Wtedy

1. $G(x) = F(x) + C$, dla $C \in \mathbb{R}$, jest funkcją pierwotną funkcji f na I;

2. Każdą funkcję pierwotną funkcji f na I można przedstawić w postaci F(x) + D, gdzie D $\in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 6.2

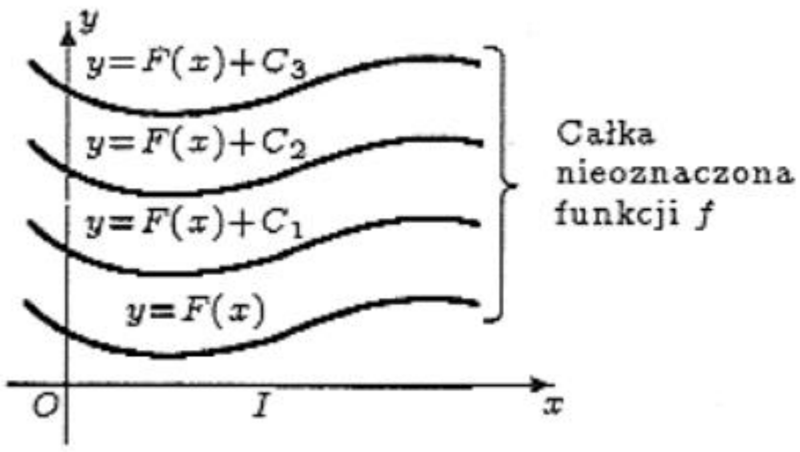
Jeśli funkcja jest ciągła na przedziale, to ma funkcję pierwotną na tym przedziale.

Definicja 6.2 (całka nieoznaczona)

Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. Całką nieoznaczoną funkcji f na przedziale I nazywamy zbiór funkcji

$$\{F(x) + C;\ C \in \mathbb{R}\}.$$

Całkę nieoznaczoną funkcji f oznaczamy przez $\int f(x)dx$ lub krótko $\int f$.



Uwaga

1. $[\int f(x)dx]' = f(x)$. $\quad (F(x)+C)' = F'(x) + \underbrace{(C)'}_{0} = f(x)$
2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

Podstawowe wzory

1. Całka za stałej

$$\int c\,dx = cx + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

$\int 5\,dx = 5x + C$

$(5x+C)' = 5$

W szczególności

$$\int 0\,dx = 0;$$

2. Całka funkcji potęgowej

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \text{dla } \alpha \neq -1;$$

$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$

$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 = x^3$

W przypadku $\alpha = -1$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,\ \text{dla } x \neq 0.$$

3. Całki funkcji trygonometrycznych

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C;$$

4. Inne ważne wzory $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C;$$
! $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} = \ln |x + \sqrt{x^2+a}| + C.$$

5. Całki pewnych typów funkcji

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$
$$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\frac{1}{f(x)} + C$$
$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$$
$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

Twierdzenie 6.3 (o liniowości całki)

Jeśli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to

1. $\int \left(f(x) + g(x)\right) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx,$
2. $\int \left(f(x) - g(x)\right) \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx,$
3. $\int (cf(x)) \, dx = c \int f(x) \, dx,$ gdzie $c \in \mathbf{R}$.

Uwaga!
Całka iloczynu (ilorazu) funkcji nie jest równa iloczynowi (ilorazowi) całek.

Zad. 1

a) $\int x^5\,dx$; b) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$; c) $\int \frac{dx}{x^4}$;

d) $\int 4^x\,dx$; e) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$; f) $\int \frac{dx}{3^x}$.

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

a) $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C \quad , C \in \mathbb{R}$

b) $\int \sqrt[3]{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C =$
$= \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C$

c) $\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-4+1} + C = -\frac{1}{3} x^{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$

d) $\int 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{-\frac{2}{3}+1} + C = 3x^{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x} + C$

f) $\int \frac{dx}{3^x} = \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln \frac{1}{3}} + C$

Zad. 2

a) $\int (x - 2e^x)\,dx$; b) $\int \frac{\left(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}\right)^2}{x}\,dx$; c) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$;

d) $\int 3^x 5^{-2x}\,dx$; e) $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$; f) $\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}\,dx$;

g) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$; h) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$; i) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$.

Ad. a) $\int (x - 2e^x) dx = \int x\,dx - \int 2e^x dx = \int x\,dx - 2\int e^x dx = \frac{1}{2}x^2 - 2e^x + C_2,$

$\int x^1 dx = \frac{x^2}{1+1} + C = \frac{1}{2}x^2 + C \quad , C \in \mathbb{R}$

$\int e^x dx = e^x + C_1 \quad , C_1 \in \mathbb{R}$

gdzie $C_2 = C - 2C_1$ ale będziemy pisać $\underline{C_2 = C}$ (umowa)

c) $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx =$
$= \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C$

d) $\int 3^x 5^{-2x} dx = \int 3^x \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^x dx = \int \left(\frac{3}{25}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{3}{25}\right)^x}{\ln \frac{3}{25}} + C$

e) $\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx = \int\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)dx =$

$= \int\left(1-\frac{\cos x+1}{2}\right)dx =$

wzór: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \underbrace{\sin^2\alpha}_{1-\cos^2\alpha}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha$

$\cos 2\alpha + 1 = 2\cos^2\alpha \quad | : 2$

$= \int\left(1-\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\right)dx = \int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x\right)dx =$

$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C$

wzór: $\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$

II sposób

$$\begin{cases} \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1 & | \int \\ \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos x & | \int \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int \sin^2\frac{x}{2}\,dx + \int\cos^2\frac{x}{2}\,dx = \underbrace{\int 1\,dx}_{x} \\ \int \cos^2\frac{x}{2}\,dx - \int\sin^2\frac{x}{2}\,dx = \int\cos x\,dx = \sin x \quad \Big| \cdot(-1) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} \int \sin^2\frac{x}{2}\,dx + \int\cos^2\frac{x}{2}\,dx = x \\ -\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx + \int\sin^2\frac{x}{2}\,dx = -\sin x \end{cases}$$

$$2\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx = x - \sin x \quad | : 2$$

$$\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C$$

h) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \int\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx =$

$= \int\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx = \int\frac{1}{\sin^2 x}\,dx - \int\frac{1}{\cos^2 x}\,dx =$

$= -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C$

i) $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx =$

$= \int\frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int\frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$

g) $\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\,dx = \int\left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$

$= \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int dx - \int\frac{1}{1+x^2}\,dx = x - \operatorname{arctg} x + C$

Wzór	Zakres zmienności
$1^\circ \int f^n(x)f'(x)\,dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$	$n \in N \cup \{0\}$
Ważne → $2^\circ \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$	$f(x) \neq 0$
$3^\circ \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = -\frac{1}{f(x)} + C$	$f(x) \neq 0$
$4^\circ \int e^{f(x)}f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$	$x \in D_f$
Ważne → $5^\circ \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C$	$f(x) > 0$

Zad. 3

$f(x) = \sin x$

a) $1^\circ \int \underbrace{\sin^5 x}_{f^5} \underbrace{\cos x}_{f'}\,dx$; b) $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^x}$; c) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}\,dx}{1+x^2}$;

d) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2-\cos x}}$; e) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$; f) $\int \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ad. a)

$$\int \sin^5 x \cdot \cos x\,dx = \frac{\sin^6 x}{6} + C = \frac{1}{6}\sin^6 x + C$$

Sprawdzenie:

$$\left(\frac{1}{6}\sin^6 x + C\right)' = \frac{1}{6}(\sin^6 x)' = \frac{1}{6}\left[(\sin x)^6\right]' = \frac{1}{6}\cdot 6(\sin x)^5\cdot(\sin x)' =$$

$$= \underbrace{\sin^5 x \cdot \cos x}_{\text{f-ja podcałkowa}}$$

Ad. b)

$$\int \frac{e^x\,dx}{1+e^x} = (*), \quad f(x) = 1+e^x$$

$$f'(x) = (1+e^x)' = e^x$$

Wzór 2°

! $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$

$$(*) = \ln\lvert 1+e^x\rvert + C = \ln(1+e^x) + C$$

Sprawdzenie:

$$(\ln(1+e^x))' = \frac{1}{1+e^x}\cdot(1+e^x)' = \frac{1}{1+e^x}\cdot e^x = \frac{e^x}{1+e^x}$$

Ad. d)

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2-\cos x}}dx = (*) \quad f(x) = 2-\cos x$$

$$f'(x) = -(-\sin x) = \sin x$$

Wzór 5°

$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C$

$$(*) = 2\sqrt{2-\cos x} + C \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Sprawdzenie

$$\left(2\sqrt{2-\cos x}\right)' = 2\cdot\left(\sqrt{2-\cos x}\right)' = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2-\cos x}}\cdot(2-\cos x)' =$$

$$= \frac{0-(\cos x)'}{\sqrt{2-\cos x}} = \frac{\sin x}{\sqrt{2-\cos x}}$$

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{\overset{f'(x)}{\frac{1}{x}}}{\underset{f(x)}{\ln x}}\,dx = \ln|\ln x| + C$$

Spr.

$$\left(\ln|\ln x|\right)' = \frac{1}{|\ln x|}\cdot\underbrace{(\ln x)'}_{\frac{1}{|x|}} = \frac{1}{|x\ln x|}$$

Uwaga!

Obliczając całki nieoznaczone umawiamy się, że całkujemy w przedziałach, w których ma to sens liczbowy ale nie wyznaczamy tych przedziałów.