

Matematyka 2

Wykład nr 1

1. Twierdzenia o całkach nieoznaczonych

Twierdzenie 1.1 (o liniowości całki)

Jeśli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to

$$1. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$

$$2. \int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx,$$

$$3. \int (cf(x)) dx = c \int f(x) dx, \text{ gdzie } c \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie 1.2 (o całkowaniu przez części) (sposób na całkowanie iloczynu funkcji)

Jeśli funkcje f i g mają ciągłe pochodne, to

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{różniczkowanie}} \underbrace{g'(x)}_{\text{całkowanie}} dx = f(x)g(x) - \int f'(x) \underbrace{g(x)}_{\text{dowolna f-ya pierwotna f-ty g'(x)}} dx.$$

Przykłady

$$1. \int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\sin x}_{g'(x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x \quad g'(x) = \sin x \\ \downarrow \quad \downarrow \\ f'(x) = 1 \quad g(x) = -\cos x \end{array} \right\} = -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) dx =$$

$$= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$\int x \cdot \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sin x \quad g'(x) = x \\ f'(x) = \cos x \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}x^2 \sin x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \cos x dx$$

bardziej skomplikowane od wyjściowej

$$2. \int \frac{x dx}{\cos^2 x} = \int x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x \quad g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ f'(x) = 1 \quad g(x) = \tan x \end{array} \right\} = x \tan x - \int \tan x dx =$$

$$= x + \lg x + \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = x + \lg x + \ln |\cos x| + C$$

Wzór: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$

$$3. \int 1 \cdot \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{l} f(x) = \ln^2 x \quad g'(x) = 1 \\ f'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \quad g(x) = x \end{array} \right| = x \ln^2 x - \int \frac{2 \ln x}{x} \cdot x dx =$$

$$= x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx$$

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} f(x) = \ln x \quad g'(x) = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = x \end{array} \right| = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - \int dx =$$

$$= x \ln x - x + C$$

"pierz części" w przypadku iloczynów jak np. wielomian i f. tryg. ($\cos x, \sin x$),
wielomian i f. wykładnicza (e^x, e^{5x}, \dots)
f. wykładnicza i f. tryg. ($\cos x, \sin x$)

$$4) \int e^{2x} \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{l} f(x) = e^{2x} \quad g'(x) = \sin x \\ f'(x) = 2e^{2x} \quad g(x) = -\cos x \end{array} \right| = -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x dx =$$

$$\int e^{2x} \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} f(x) = e^{2x} \quad g'(x) = \cos x \\ f'(x) = 2e^{2x} \quad g(x) = \sin x \end{array} \right| = e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x dx$$

$$\int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + 2 \left(e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x dx \right)$$

$$\int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4 \int e^{2x} \sin x dx$$

$$5 \int e^{2x} \sin x dx = e^{2x} (2 \sin x - \cos x) \quad | :5$$

$$\int e^{2x} \sin x dx = \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) + C$$

Twierdzenie 1.3 (o całkowaniu przez podstawienie)

Jeżeli:

1. Funkcja $f: \underline{A} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale A ,

2. Funkcja $\varphi: \underline{B} \rightarrow A$ ma ciągłą pochodną na przedziale B ,

to

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C,$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f.

Przykłady

podstawienie: $t = \sin x$

$$1. \int \sin x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ \text{ob\kern-0.08em} \acute{o}b\kern-0.08em e\kern-0.08em s\kern-0.08em t\kern-0.08em r\kern-0.08em o\kern-0.08em n\kern-0.08em y\kern-0.08em\ \cdot\kern-0.08em\ \cdot\kern-0.08em\ \text{r\kern-0.08em}o\kern-0.08em z\kern-0.08em m\kern-0.08em u\kern-0.08em l\kern-0.08em u\kern-0.08em j\kern-0.08em e\kern-0.08em \\ 1 \cdot dt = \cos x \cdot dx \end{array} \right| = \int t \cdot dt = \frac{1}{2} t^2 + C =$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 x + C$$

$$2. \int \frac{x+1}{\sqrt{x+2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+2} \quad | \quad ()^2 \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} dx \quad | \cdot 2 \\ 2dt = \frac{1}{\sqrt{x+2}} \cdot dx \\ \rightarrow t^2 = x+2 \Rightarrow x = t^2 - 2 \end{array} \right| = \int (x+1) \cdot 2 dt = 2 \int (t^2 - 2 + 1) dt =$$

$$= 2 \int (t^2 - 1) dt = 2 \left(\int t^2 dt - \int dt \right) =$$

$$2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) + C = \frac{2}{3} t^3 - 2t + C =$$

$$= \frac{2}{3} (\sqrt{x+2})^3 - 2\sqrt{x+2} + C = \frac{2}{3} (x+2)\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+2} + C$$

$$3. \int \frac{dx}{1+e^{2x}} = \left| \begin{array}{l} t = e^{2x} \\ dt = 2e^{2x} dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2e^{2x}} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{2e^{2x}}}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{e^{2x} + (e^{2x})^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t + t^2} \leftarrow \text{całko wymierna}$$

$$y = \int \frac{dt}{t(1+t)}$$

ułamek rozłożony na ułamki proste

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} \quad | \cdot t(1+t)$$

$$1 = A(1+t) + Bt$$

dla $t = -1$: $1 = -B \Rightarrow B = -1$

dla $t = 0$: $1 = A$

całki logarytmiczne

$$y = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt = \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t+1} dt = \ln|t| - \ln|t+1| + C$$

Więc $\int \frac{dx}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2} (\ln|t| - \ln|t+1|) + C = \frac{1}{2} (\underbrace{\ln e^{2x}}_{2x \cdot \underbrace{\ln e}_1} - \ln(e^{2x} + 1)) + C =$

$$= x - \ln(e^{2x} + 1) + C$$

2. Całkowanie funkcji wymiernych

$$\left(\int \frac{W_m(x)}{Q_m(x)} dx \right)$$

2.1 Algorytm całkowania funkcji wymiernych

1. Funkcję wymierną zapisujemy w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.
stopień licznika < stopień mianownika
2. Mianownik funkcji wymiernej właściwej zapisujemy w postaci iloczynowej (rozkładamy na czynniki liniowe i kwadratowe).
3. Dokonujemy rozkładu funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste pierwszego i drugiego rodzaju.
4. Obliczamy całki poszczególnych składników rozkładu.

2.2 Całkowanie ułamków prostych I – go rodzaju

$$1. \int \frac{K}{x+k} dx = K \int \frac{1}{x+k} dx = K \ln |x+k| + C, \quad K, k, C \in \mathbb{R}.$$

Uwaga

Całki postaci $\int \frac{1}{x+k} dx$, gdzie $k \in \mathbb{R}$, nazywamy logarytmicznymi.

$$2. \int \frac{K}{(x+k)^n} dx = -\frac{K}{(n-1)(x+k)^{n-1}} + C, \quad \text{dla } n \geq 2.$$
$$\left\{ \begin{aligned} \int \frac{1}{(x+2)^3} dx &= \left\{ \begin{aligned} x+2 &= t \\ dx &= dt \end{aligned} \right\} = \\ &= \int \frac{1}{t^3} dt = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(x+2)^2} + C \end{aligned} \right.$$

Przykłady

$$1. \int \frac{x dx}{(x-1)(x+3)(2-x)}$$
$$\frac{x}{(x-1)(x+3)(2-x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{2-x} \quad | \cdot (x-1)(x+3)(2-x)$$

$$x = A(x+3)(2-x) + B(x-1)(2-x) + C(x-1)(x+3)$$

dla $x=1$: $1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

dla $x=2$: $2 = 5C \Rightarrow C = \frac{2}{5}$

dla $x=-3$: $-3 = B \cdot (-4) \cdot 5 \Rightarrow B = \frac{3}{20}$

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+3)(2-x)} dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{x-1} dx + \int \frac{\frac{3}{20}}{x+3} dx + \int \frac{\frac{2}{5}}{2-x} dx =$$
$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{3}{20} \int \frac{1}{x+3} dx + \frac{2}{5} \int \frac{1}{2-x} dx =$$

$$= \frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{3}{20} \ln|x+3| + \frac{2}{5}(-\ln|x-2|) + C$$

$$\int \frac{1}{2-x} dx = -\int \frac{1}{x-2} dx = -\ln|x-2| + C$$

$$2. \int \frac{2x+4}{x^3-2x^2} dx = \int \frac{2x+4}{x^2(x-2)} = (*)$$

$$\frac{2x+4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2} \quad | \cdot x^2(x-2)$$

$$2x+4 = A(x-2) + Bx(x-2) + Cx^2$$

$$2x+4 = \underline{Ax} - 2A + \underline{Bx^2} - \underline{2Bx} + \underline{Cx^2}$$

$$2x+4 = x^2(B+C) + x(A-2B) - 2A$$

$$x^2: 0 = B+C$$

$$x: 2 = A-2B \Rightarrow 2-A = -2B \Rightarrow \underline{B = -2}$$

$$x^0: 4 = -2A \Rightarrow \underline{A = -2}$$

$$(*) = \int \left(-\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{2}{x-2} \right) dx = -2 \int \frac{1}{x^2} dx - 2 \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{x-2} dx =$$

$$= \frac{2}{x} - 2 \ln|x| + 2 \ln|x-2| + C \quad \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{2}{x} + 2(\ln|x-2| - \ln|x|) + C = \frac{2}{x} + 2 \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + C$$

$$3. \int \frac{x^2}{(x+2)^3} dx$$

2.3 Całkowanie ułamków prostych II – go rodzaju

$$\int \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n} dx$$

Wykonujemy najpierw podstawienie $t = x^2 + px + q$, następnie

zapisujemy trójmian $x^2 + px + q$ w postaci kanonicznej i stosujemy

kolejne podstawienie za $x + \frac{p}{2}$.

Przykłady

$$1. \int \frac{x dx}{x^2 - x + 1} \quad \Delta < 0 = \int \frac{x dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \left\{ \begin{array}{l} x - \frac{1}{2} = t \\ dx = dt \\ \rightarrow x = t + \frac{1}{2} \end{array} \right\} = \int \frac{(t + \frac{1}{2}) dt}{t^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \int \left(\frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}} \right) dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + \frac{3}{4}} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt =$$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

$$(*) = \frac{1}{2} \ln|t^2 + \frac{3}{4}| + \frac{1}{2} \int$$

wzór

$$\int \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \left\{ \begin{array}{l} t^2 = \frac{3}{4} u^2 \quad | \sqrt{} \\ t = \frac{\sqrt{3}}{2} u \\ dt = \frac{\sqrt{3}}{2} du \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{3}{4} u^2 + \frac{3}{4}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} du = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}} \int \frac{1}{u^2 + 1} du =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3} \arctan u + C = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} (x - \frac{1}{2}) + C$$

$$(*) = \frac{1}{2} \ln|(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}| + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2\sqrt{3}}{3} (x - \frac{1}{2}) + C$$

$$2. \int \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = (*)$$

$\Delta < 0$

$$\frac{x^2 + 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 3} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2x + 3)^2} \quad | \cdot (x^2 + 2x + 3)^2$$

$$x^2 + 1 = (Ax + B)(x^2 + 2x + 3) + Cx + D$$

$$x^2 + 1 = \underline{Ax^3} + \underline{2Ax^2} + \underline{3Ax} + \underline{Bx^2} + \underline{2Bx} + \underline{3B} + \underline{Cx} + \underline{D}$$

$$x^3: \quad \begin{array}{cc} L & P \\ 0 & = A \end{array}$$

$$x: \quad 0 = 3A + 2B + C$$

$\begin{array}{cc} 0 & \downarrow 1 \end{array}$

$$x^2: \quad 1 = 2A + B$$

$$\underline{B = 1}$$

$$\underline{C = -2}$$

$$x^0: \quad 3B + D = 1$$

$\begin{array}{cc} \downarrow 1 & \end{array}$

$$\underline{D = -2}$$

$$(*) = \int \left(\frac{1}{x^2 + 2x + 3} + \frac{-2x - 2}{(x^2 + 2x + 3)^2} \right) dx = \underbrace{\int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx}_{J_1} - \underbrace{\int \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx}_{J_2}$$

$$J_1 = \int \frac{1}{(x+1)^2+2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x+1=t \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t^2+2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

$$J_2 = \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2+2x+3=t \\ (2x+2)dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C =$$

$$= -\frac{1}{x^2+2x+3} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}} dt, \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{3} + C$$