

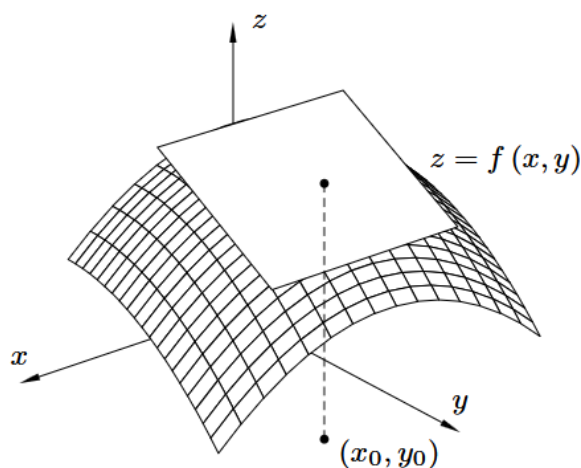
Matematyka 2

Wykład nr 5

1. Płaszczyzna styczna do wykresu funkcji

Niech funkcja $f(x, y)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe f'_x , f'_y w punkcie (x_0, y_0) . Płaszczyzna styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ma postać:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$



Zadanie

Napisać równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji f w podanym punkcie:

1) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(1, -1, 2)$;

2) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(3, 4, 5)$.

Ad. 1, $(x_0, y_0) = (1, -1)$, $f(1, -1) = 1^2 + (-1)^2 = 2$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \Rightarrow f'_x(x_0, y_0) = 2x|_{x=1}; f'_y(x_0, y_0) = 2y|_{y=-1}$$

$$z - 2 = 2(x - 1) + (-2)(y - (-1))$$

$$z = 2x - 2 - 2y - 2 + 2 \Rightarrow \underline{z = 2x - 2y - 2}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (z = x^2 + y^2)$$



$$\text{Ad. 2} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$f(3, 4) = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$f'_x(3, 4) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{\substack{x=3 \\ y=4}} = \frac{3}{5}$$

$$f'_y(3, 4) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{\substack{x=3 \\ y=4}} = \frac{4}{5}$$

$$z - 5 = \frac{3}{5}(x - 3) + \frac{4}{5}(y - 4)$$

$$\underline{z = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y}$$

2. Różniczka funkcji

Definicja 2.1 $f(x, y)$

Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0) . Różniczką funkcji f w punkcie (x_0, y_0) nazywamy funkcję $df(x_0, y_0)$ zmiennych $\Delta x, \Delta y$ określoną wzorem:

$$df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

Różniczkę funkcji oznaczamy krótko df .

Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0) . Wtedy:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y).$$

Wzór ten ma zastosowanie w obliczaniu przybliżonych wartości wyrażeń algebraicznych oraz do oceny zmiany wartości funkcji przy niewielkich zmianach argumentów.

Przykład

Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości funkcji:

a) $(1,04)^{3,01}$;

b) $\sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3}$

Ad. a)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^y \\ f'_x &= y \cdot x^{y-1} \\ f'_y &= x^y \cdot \ln x \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} x_0 &= 1 \quad i \quad \Delta x = 0,04 \\ y_0 &= 3 \quad i \quad \Delta y = 0,01 \end{aligned}$$

$$f(1,04; 3,01) = (1,04)^{3,01} \approx f(1,3) + df(1,3)(0,04; 0,01)$$

$$(1,04)^{3,01} \approx 1^3 + f'_x(1,3) \cdot 0,04 + f'_y(1,3) \cdot 0,01$$

$$(1,04)^{3,01} \approx 1 + 3 \cdot 1^2 \cdot 0,04 + 1^3 \cdot \underbrace{\ln 1}_0 \cdot 0,01$$

$$(1,04)^{3,01} \approx \underline{\underline{1,12}}$$

$$b) f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^3}, \quad x_0 = 1 \quad \Delta x = 0,02$$

$$y_0 = 2 \quad \Delta y = -0,03$$

$$f'_x = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \quad f'_x(1,2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f'_y = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \quad f'_y(1,2) = \frac{12}{6} = 2$$

$$\sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3} \approx \sqrt{1^3 + 2^3} + \frac{1}{2} \cdot 0,02 + 2 \cdot (-0,03) =$$

$$= 3 + 0,01 - 0,06 = \underline{\underline{2,95}}$$

3. Pochodna kierunkowa i gradient funkcji

Definicja 3.1

$$f(x,y)$$

Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0, y_0) .

Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie (x_0, y_0) w kierunku wektora v ,

$v = (v_x, v_y)$ określamy wzorem:

→ wektor jednostkowy

$$f'_v(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Pochodna kierunkowa określa szybkość zmiany wartości funkcji f w kierunku wektora v .

Definicja 3.2

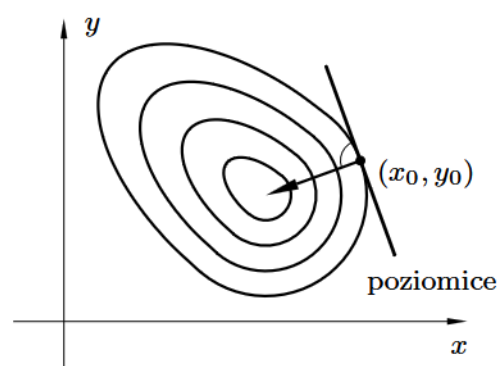
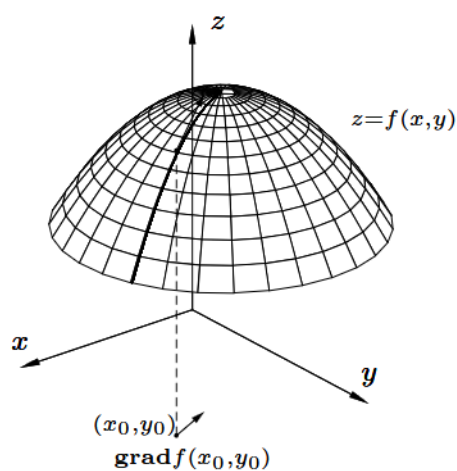
Gradientem funkcji f w punkcie (x_0, y_0) nazywamy wektor określony wzorem:

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)).$$

Gradient funkcji oznaczamy również symbolem ∇f .

Interpretacja geometryczna gradientu

1. Gradient funkcji w punkcie wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji w tym punkcie.
2. Gradient funkcji w punkcie jest prostopadły do poziomicy funkcji przechodzącej przez ten punkt.



Twierdzenie 3.1

Niech pochodne cząstkowe f'_x, f'_y będą ciągłe w punkcie (x_0, y_0) oraz niech v oznacza wektor na płaszczyźnie. Wtedy pochodna kierunkowa f'_v wyraża się wzorem:

$$f'_v(x_0, y_0) = \text{grad } f(x_0, y_0) \circ v.$$

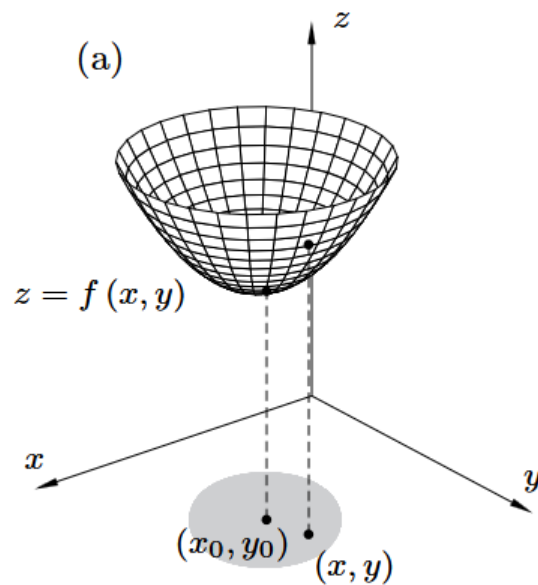
iloczyn skalarny

4. Ekstrema lokalne funkcji

Definicja 4.1

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne właściwe jeżeli istnieje takie sąsiedztwo punktu (x_0, y_0) , w którym dla dowolnego punktu (x, y) zachodzi nierówność:

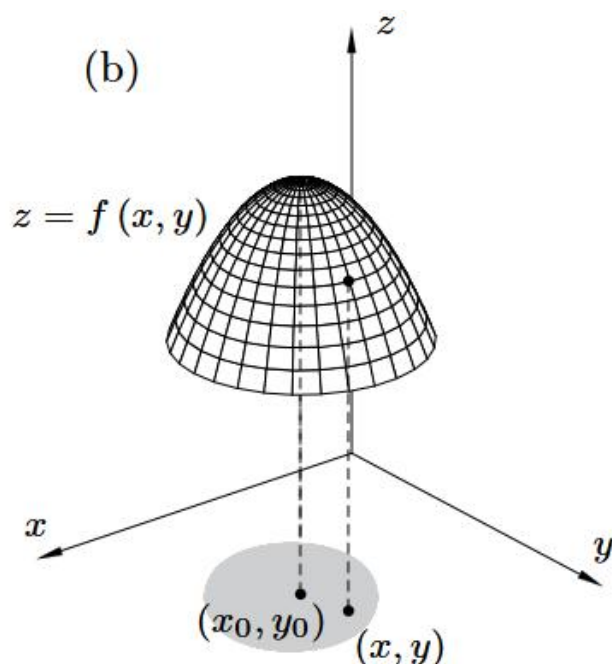
$$f(x, y) > f(x_0, y_0).$$



Jeżeli w powyższej definicji nierówność „ $<$ ” zastąpimy przez „ \leq ”, to mówimy, że funkcja ma minimum lokalne w punkcie (x_0, y_0) .

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) maksimum lokalne właściwe jeżeli istnieje takie sąsiedztwo punktu (x_0, y_0) , w którym dla dowolnego punktu (x, y) zachodzi nierówność:

$$f(x, y) < f(x_0, y_0).$$



Jeżeli w powyższej definicji nierówność „ $>$ ” zastąpimy przez „ \geq ”, to mówimy, że funkcja ma maksimum lokalne w punkcie (x_0, y_0) .

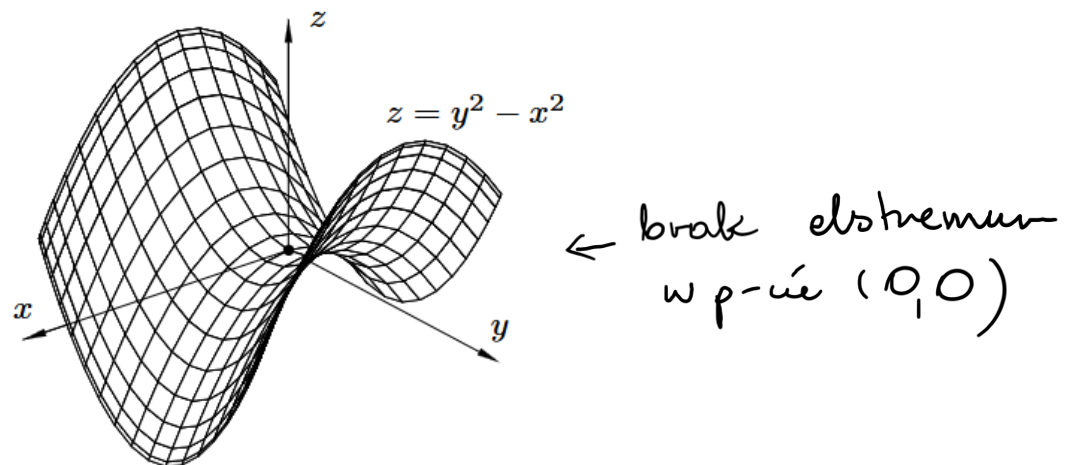
Minima i maksima lokalne funkcji (właściwe i niewłaściwe) nazywamy ekstremami lokalnymi.

Twierdzenie 4.1 (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeżeli funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie (x_0, y_0) oraz istnieją pochodne cząstkowe $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$, to:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa. Zerowanie się w punkcie obu pochodnych cząstkowych funkcji nie gwarantuje istnienia w tym punkcie ekstremum. Na przykład funkcja $f(x, y) = y^2 - x^2$.



Punkt, w którym zerują się obie pochodne cząstkowe I – go rzędu funkcji, nazywamy punktem stacjonarnym (krytycznym).

Twierdzenie 4.2 (warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji dwóch zmiennych)

Niech funkcja $f(x, y)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu na otoczeniu punktu (x_0, y_0) . Ponadto niech

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

oraz

$$H(x_0, y_0) = \det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} (x_0, y_0) > 0.$$

Wtedy funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalne właściwe i jest to minimum, gdy $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ albo maksimum, gdy $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$.

Gdy wyznacznik $H(x_0, y_0)$ jest ujemny, to funkcja f nie ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalnego.

W przypadku gdy $H(x_0, y_0) = 0$, sprawdzanie czy funkcja ma ekstremum w (x_0, y_0) należy przeprowadzić inną metodą, np. korzystając wprost z definicji.

Funkcję H występującą w definicji nazywamy hessianem.

Przykłady

Wyznaczyć wszystkie ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych:

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$,

b) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 4\ln x - 10\ln y$.

Ad. a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$, $D_f: x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - y$$

$$f'_y(x, y) = 3y^2 - x$$

$$\text{WK: } \begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x^2 - y = 0 \\ 3y^2 - x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x^2 \\ 3 \cdot (9x^4) - x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3x^2 \\ x(27x^3 - 1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Punkty krytyczne: $P_1(0, 0)$, $P_2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

$$f''_{xx}(x, y) = 6x, \quad f''_{yy}(x, y) = 6y$$

$$f''_{yx}(x, y) = -1, \quad f''_{xy}(x, y) = -1$$

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 1$$

Sprawdzam znak hessianu w punktach krytycznych:

$$H(P_1) = -1 < 0 \Rightarrow \text{w } P_1 \text{ nie ma ekstremum lokalnego}$$

$$H(P_2) = 36 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - 1 > 0 \Rightarrow \text{w } P_2 \text{ jest ekstremum lokalne}$$

Sprawdzam jakiemu typowi jest ekstremum w punkcie P_2 :

$$f''_{xx}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2 > 0 \Rightarrow \text{w } P_2 \text{ jest minimum lokalne.}$$

Odp: $f_{\min}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{27}$

Ad. 3.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 4\ln x - 10\ln y \quad D_f: \begin{matrix} x \in (0, \infty) \\ y \in (0, \infty) \end{matrix}$$



$$f'_x(x, y) = 2x + y - \frac{4}{x}$$

$$f'_y(x, y) = 2y + x - \frac{10}{y}$$

$$\text{WK: } \begin{cases} 2x + y - \frac{4}{x} = 0 \\ 2y + x - \frac{10}{y} = 0 \end{cases}$$

$$(1) \quad y = \frac{4}{x} - 2x$$

$$(2) \quad \frac{8}{x} - 4x + x - \frac{10}{\frac{4}{x} - 2x} = 0$$

$$(2) \quad \frac{8}{x} - 3x - \frac{10}{\frac{4-2x^2}{x}} = 0$$

$$\frac{8}{x} - 3x - \frac{10x}{4-2x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{8(4-2x^2) - 3x \cdot x(4-2x^2) - 10x^2}{x(4-2x^2)} = 0$$

$$f''_{xx} = 2 + \frac{4}{x^2} \quad f''_{yx} = 1$$

$$f''_{yy} = 2 + \frac{10}{y^2} \quad f''_{xy} = 1$$

$$32 - 16x^2 - 12x^2 + 6x^4 - 10x^2 = 0$$

$$6x^4 - 38x^2 + 32 = 0 \quad | :2$$

$$3x^4 - 19x^2 + 16 = 0$$

$$x^2 = t, \quad t > 0$$

$$3t^2 - 19t + 16 = 0$$

$$\Delta_t = 361 - 12 \cdot 16 = 169$$

$$-\frac{-19 \pm 13}{6} = \frac{16}{3}$$

$$-\frac{-19 \pm 13}{6} = 1$$

$$t_1 = 1 \quad \vee \quad t_2 = \frac{16}{3}$$

$$x^2 = 1 \quad \vee \quad x^2 = \frac{16}{3}$$

$$x = 1 \vee x = -1 \vee x = \frac{4}{\sqrt{3}} \vee x = -\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$(1) \quad y = \frac{4}{x} - 2x$$

$$\frac{4}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

$$P_1 \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} x=\frac{4}{\sqrt{3}} \\ y=\sqrt{3} - \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{8}{\sqrt{3}} < 0 \end{cases} \quad P_2 \notin D_f$$

Punkt krytyczny $P_1(1, 2)$

$$H = \begin{vmatrix} 2 + \frac{4}{x^2} & 1 \\ 1 & 2 + \frac{10}{y^2} \end{vmatrix}$$

$$H(1, 2) = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & \frac{9}{2} \end{vmatrix} = 27 - 1 > 0 \Rightarrow$$

\Rightarrow w P_1 jest ekstremum

$$f''_{xx}(P_1) = 6 > 0 \Rightarrow \omega P_1 \text{ jest minimum}$$

$$\text{Odp! } f_{\min}(1,2) = 1^2 + 2^2 + 2 - 4 \underbrace{\ln 1}_1 - 10 \ln 2 = 7 - 10 \ln 2$$

Twierdzenie 4.3 (warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji trzech zmiennych)

Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu na otoczeniu punktu (x_0, y_0, z_0) . Ponadto niech

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

oraz

$$\textcircled{1} \quad A = f''_{xx}(x_0, y_0, z_0) > 0, \quad \textcircled{2} \quad B = \det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} (x_0, y_0, z_0) > 0,$$

$$\textcircled{3} \quad \underset{\substack{\nearrow \\ \text{hessian}}}{C} = \det \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{bmatrix} (x_0, y_0, z_0) > 0.$$

Wtedy funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0, z_0) minimum lokalne właściwe.

Gdy $A < 0$, $B > 0$, $C < 0$, to funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0, z_0) maksimum lokalne właściwe.

Dla pozostałych wartości A, B, C , o ile $A \cdot B \cdot C \neq 0$, funkcja f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie (x_0, y_0, z_0) .

Przykład

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x + 2z \quad \mathcal{D}_f: x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$$

$$f'_x(x, y, z) = 2x - y + 1$$

$$f'_y(x, y, z) = 2y - x$$

$$f'_z(x, y, z) = 2z + 2$$

$$\text{WK: } \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x = 0 \\ 2z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - y + 1 = 0 \\ x = -\frac{2}{3} \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3} \\ x = -\frac{2}{3} \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\mathcal{P}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1\right)$$

$$f''_{xx}(x, y, z) = 2$$

$$f''_{yx}(x, y, z) = -1$$

$$f''_{zx}(x, y, z) = 0$$

$$f''_{yy}(x, y, z) = 2$$

$$f''_{xy}(x, y, z) = -1$$

$$f''_{zy}(x, y, z) = 0$$

$$f''_{zz}(x, y, z) = 2$$

$$f''_{xz}(x, y, z) = 0$$

$$f''_{yz}(x, y, z) = 0$$

$$H = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \leftarrow \text{nie zależy od wartości } x, y, z$$

$$A = f''_{xx}(P) = 2 > 0, \quad B = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 > 0,$$

$$C = H = 8 - 2 = 6 > 0$$

$$A > 0, B > 0, C > 0$$

funkcja $f(x, y, z)$ ma w p-cie $(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -1)$ minimum
lokalne