Matematyka 2

Wykład nr 6

1. Równania różniczkowe – wiadomości wstępne

Równania różniczkowe są równaniami, w których niewiadomą jest funkcja występująca pod symbolem pochodnej. Jeżeli niewiadoma jest funkcją jednej zmiennej, mówimy że równanie różniczkowe jest zwyczajne. Na przykład równania: $y = f(x)$

(1) $y' + 2y = sin\, x$, (2) $y'' - 2yy' - (y')^2 = 0$, gdzie $y = f(x)$.

r-nie I-go rzędu r-nie II-go rzędu

W równaniach tych występuje zmienna niezależna x, szukana funkcja $y = f(x)$ oraz pochodne y', y'',...itd.
Rząd najwyższej pochodnej występującej w równaniu nazywa się rzędem równania.
Zatem równanie (1) jest równaniem pierwszego rzędu, równanie (2) jest równaniem drugiego rzędu.
Jeżeli w równaniu występuje szukana funkcja y, która jest funkcją dwóch lub więcej zmiennych oraz jej pochodne cząstkowe pierwszego lub wyższych rzędów, równanie takie nazywamy równaniem różniczkowym cząstkowym. Na przykład równanie:

$$f''_{xx} - 2xf''_{tt} = 0,$$

gdzie szukana funkcja f jest funkcją dwóch zmiennych $f = f(x,t)$.
Jest to równanie różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego.

Przykłady

Rozważmy równanie

$$y' = 2x.$$

Szukamy funkcji $y = y(x)$, której pochodna jest równa $2x$. Takich funkcji jest oczywiście nieskończenie wiele, mianowicie

$$y = y(x) = x^2 + C, \qquad C \epsilon \mathbb{R}.$$

$(x^2 + C)' = 2x \quad \rightarrow \quad \int 2x \, dx = x^2 + C$

Każda z powyższych funkcji spełnia równanie różniczkowe w całym zbiorze $\mathbb{R}$. Mówimy wówczas, że rodzina funkcji

$$\{x^2 + C: \ C \epsilon \mathbb{R}\}$$

stanowi całkę ogólną (rozwiązanie ogólne) rozważanego równania.

Rozważmy teraz równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$y'' = x^2.$$

Szukamy funkcji $y = y(x)$, której druga pochodna jest równa x^2.

W tym celu całkujemy dwukrotnie:

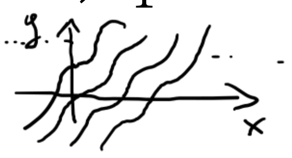
$$y' = \int x^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3 + C, \ \ C \epsilon \mathbb{R}$$

$$y = \int \left(\frac{1}{3}x^3 + C\right) dx = \frac{1}{12}x^4 + Cx + C_1, \ \ C_1 \ \epsilon \mathbb{R}.$$

Spr. $\left[\left(\frac{1}{12}x^4 + Cx + C_1\right)'\right]' = \left[\frac{1}{3}x^3 + C\right]' = x^2$

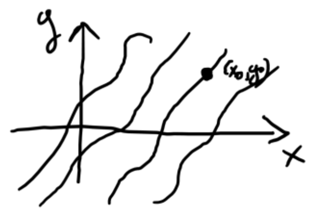
W tym przypadku całka ogólna równania jest rodziną funkcji zależną od dwóch parametrów rzeczywistych C, C_1.

Całka ogólna = rodzina funkcji



Definicja 1.1 (zagadnienie początkowe Cauchy'ego)

Zagadnieniem (warunkiem) początkowym Cauchy'ego dla równania różniczkowego rzędu pierwszego nazywamy zagadnienie polegające na tym, żeby spośród wszystkich rozwiązań (całek) danego równania wyznaczyć to, którego wykres przechodzi przez dany punkt (x_0, y_0).



$\leftarrow$ Krzywe całkowe

r-nie I-go rzędu

Tak więc mamy dane równanie różniczkowe $y' = f(x, y)$ oraz warunek początkowy $y(x_0) = y_0$. $\leftarrow (x_0, y_0)$

Wyznaczone rozwiązanie nazywamy całką szczególną równania $y' = f(x, y)$ spełniającą warunek początkowy $y(x_0) = y_0$.

Wykres funkcji będącej całką szczególną nazywamy krzywą całkową danego równania przechodzącą przez punkt (x_0, y_0).

Przykład

Rozwiązać równanie $y' = x^3$ przy warunku początkowym $y\,(2) = 6$.

Szukamy krzywej całkowej przechodzącej przez punkt (2,6)

1° Wyznaczamy całkę ogólną równania:

$$y = \int x^3\, dx,$$

$$y = \frac{1}{4}x^4 + C,$$

2° Podstawiając w całce ogólnej $x = 2$, $y = 6$, dostajemy:

$$6 = \frac{1}{4} \cdot 2^4 + C \quad \Rightarrow \quad C = 2.$$

$6 = 4 + C$

Czyli szukana całka szczególna wyraża się wzorem $y = \frac{1}{4}x^4 + 2$.

W przypadku równań rzędu drugiego, warunek początkowy (x_0, y_0) nie wystarcza do wyznaczenia równania krzywej całkowej (wtedy rozwiązanie ogólne jest zależne od dwóch parametrów). W tym przypadku musimy dodać jeszcze jeden warunek.

Definicja 1.2 (zagadnienie początkowe Cauchy'ego dla równania II- go rzędu)

Zagadnieniem (warunkiem) początkowym Cauchy'ego dla równania różniczkowego rzędu drugiego nazywamy zagadnienie polegające na wyznaczeniu takiej całki szczególnej $y(x)$ tego równania, która spełnia warunki początkowe:

$$y(x_0) = y_0 \; ; \; y'(x_0) = y_1.$$

Interpretacja geometryczna jest następująca: znajdujemy funkcję spełniającą dane równanie, której wykres przechodzi przez punkt (x_0, y_0) oraz styczna do wykresu w tym punkcie tworzy z osią Ox kąt α, którego tangens jest równy y_1.

Przedstawię teraz niektóre typy równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego.

2. Równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Definicja 2.1

Równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych nazywamy równanie postaci

$$\frac{dy}{dx} = y' = g(x)h(y),$$

gdzie funkcje $g: I \to \mathbb{R}$ oraz $h: J \to \mathbb{R}$ są ciągłe odpowiednio na przedziałach I, J.

Przykłady

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+1}{xy}$

2) $y' = \frac{ylny}{sinx}$

Ad. 1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+1}{xy}, \quad x \neq 0, \; y \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{y^2+1}{y}}_{h(y)}$$

Chcemy otrzymać po jednej stronie znaku równości wyrażenie zależne od x pomnożone przez dx i po drugiej stronie znaku równości wyrażenie zależne od y pomnożone przez dy.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+1}{xy} \; \Big| \cdot dx \qquad \text{lub} \qquad xy\,dy = (y^2+1)\,dx \; \Big| : x(y^2+1)$$

$$dy = \frac{y^2+1}{xy}\,dx \;\Big|\cdot \frac{y}{y^2+1}$$

$$\underbrace{\frac{y}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{x}\,dx}_{\text{zmienne rozdzielone}}$$

$$\underbrace{\frac{y}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{x}\,dx}_{\text{zmienne rozdzielone}}$$

lub $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2+1}{xy} \quad : dy$

$$\frac{1}{dx} = \frac{y^2+1}{xy}\cdot\frac{1}{dy} \;\Big|\cdot x$$

$$\frac{x}{dx} = \frac{y^2+1}{y\,dy}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{y\,dy}{y^2+1}$$

Następnie dwustronnie całkujemy równanie

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{y\,dy}{y^2+1}$$

$$L = \int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C\,,\quad C\in\mathbb{R}$$

$$P = \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{2}\ln|y^2+1| + C_1\,,\quad C_1\in\mathbb{R}$$

Uwaga

$$\ln|x| + C = \frac{1}{2}\ln|y^2+1| + C_1$$

$$\ln|x| = \frac{1}{2}\ln|y^2+1| + C_2\,,\quad \text{gdzie } C_2 = C_1 - C\,,\; C_2\in\mathbb{R}$$

Umawiamy się pisać stałą C tylko po jednej stronie równania

$$\ln|x| = \frac{1}{2}\ln|y^2+1| + C\,,\quad C\in\mathbb{R}$$

$$\ln|x| = \ln\sqrt{y^2+1} + C$$

$\ln a + \ln b = \ln(a\cdot b)$

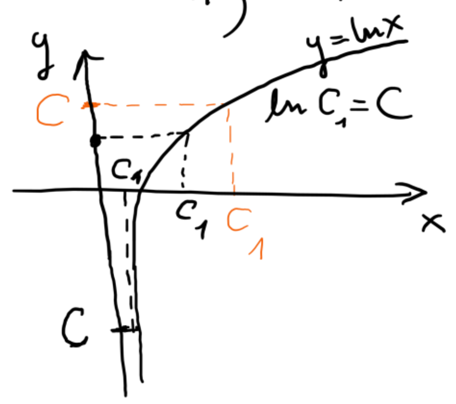
stałą C zapisujemy jako $C = \ln C_1,\; C_1 > 0$

$$\ln|x| = \ln\sqrt{y^2+1} + \ln C_1\,,\quad C_1 > 0$$

$$\ln|x| = \ln C_1\sqrt{y^2+1}$$

$$|x| = C_1\sqrt{y^2+1}$$

$$x = \pm C_1\sqrt{y^2+1}\,,\quad \text{niech } \pm C_1 = C_2\,,\; \text{czyli } C_2 \neq 0$$



$$\underbrace{x = C_2\sqrt{y^2+1}}_{\text{całka ogólna r-nia 1}}$$

2) $\quad y' = \dfrac{y\ln y}{\sin x}\,,\quad \sin x \neq 0\,,\; x \neq k\pi\,,\; k\in\mathbb{Z}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\ln y}{\sin x} \quad \Big| \cdot \frac{dx}{y\ln y}$$

$$\frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{\sin x}, \quad y \neq 0, \ \ln y \neq 0 \quad y \neq 1$$

odrzucamy rozwiązania dla szukanego y

Zastanówmy się, czy nie odrzucamy rozwiązania szczególnego?

$$\int \frac{dy}{y\ln y} = \int \frac{dx}{\sin x}$$

Czy $y=0$ jest całką szczególną r-nia 2? $y' = \frac{y\ln y}{\sin x}$ NIE JEST

$$L = \int \frac{1}{y\ln y}\,dy = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln y \\ dt = \frac{1}{y}dy \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln y| + C, \ C \in \mathbb{R}$$

$$P = \int \frac{dx}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\sin x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\,dx}{1-\cos^2 x} = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin x\,dx = -dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{-dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C_1 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C_1, \ C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

$L = P$

$$\ln|\ln y| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right| + C \quad \Big| \cdot 2$$

$$2\ln|\ln y| = \ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right| + C$$

$$\ln|\ln y|^2 - \ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right| = C$$

$$\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$$

$$\ln_e \frac{\ln^2 y}{\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|} = C$$

$$\boxed{\log_a b = c \iff b = a^c}$$

$$\underbrace{\left|\frac{\cos x+1}{\cos x-1}\right| \cdot \ln^2 y = \underbrace{e^C}_{C_1 \in \mathbb{R}}}_{\text{całka ogólna r-nia (2)}}$$

Czy $y=1$ jest całką szczególną równania $y' = \frac{y\ln y}{\sin x}$?

$$\underbrace{(1)'}_{0} = \frac{1\cdot\overbrace{\ln 1}^{0}}{x}$$

Tak, $y=1$ jest rozw. szczególnym

Pewne typy równań różniczkowych rzędu pierwszego dają się sprowadzić do równań o zmiennych rozdzielonych.

3. Równanie różniczkowe jednorodne

Równanie postaci $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ nazywamy równaniem jednorodnym. Zakładamy, że funkcja f jest ciągła w pewnym przedziale $I \subset \mathbb{R}$. Równanie jednorodne sprowadzamy do równania o rozdzielonych zmiennych za pomocą podstawienia $u(x) = \frac{y(x)}{x}$. Wtedy

$y(x) = x \cdot u(x)$ i różniczkujemy (iloczyn)

$y' = (x)' \cdot u(x) + x \cdot u'(x)$

$$y(x) = xu(x),$$
$$y'(x) = u(x) + xu'(x).$$

Przykłady

1) $y' = \frac{y+x}{x-y}$
2) $xy' = x + y$

Ad. 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{x-y}$ nie można rozdzielić zmiennych

mnożę licznik i mianownik przez $\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $y \neq x$

$$y' = \frac{y+x}{x-y} \begin{matrix} \cdot \frac{1}{x} \\ \cdot \frac{1}{x} \end{matrix}$$

$$y' = \frac{\frac{y}{x} + 1}{1 - \frac{y}{x}}$$

podstawiam $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot u$

$y' = u + x \cdot u'$

$$u + x \cdot u' = \frac{u+1}{1-u} \quad | -u$$

$$x \cdot u' = \frac{u+1}{1-u} - u$$

$$x \cdot u' = \frac{u+1 - u(1-u)}{1-u}$$

$$x \cdot u' = \frac{u+1-u+u^2}{1-u}$$

$$x \cdot u' = \frac{1+u^2}{1-u}$$

$$x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{1-u} \quad \Big| \cdot \frac{1}{du}$$

$$\frac{x}{dx} = \frac{1+u^2}{1-u} \cdot \frac{1}{du}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-u}{1+u^2} du$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1-u}{1+u^2} du$$

$L = \frac{1}{x}$ $\quad P = \int \frac{1}{1+u^2} du - \frac{1}{2} \int \frac{2u}{1+u^2} du$

$P = \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + C$

$L = P$

$$\ln|x| = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + C$$

Ad 2. $xy' = x + y \quad | : x$, $x \neq 0$

$y' = 1 + \frac{y}{x}$, podst. $u = \frac{y}{x}$

$y = x \cdot u$

$y' = u + xu'$

$$u + xu' = 1 + u$$

$$xu' = 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad | : du$$

$$\frac{1}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{du} \quad \Big| \cdot x$$

$$\frac{x}{dx} = \frac{1}{du} \Rightarrow \frac{dx}{x} = du$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int du \Rightarrow L = \ln|x|, \quad P = u + c = \frac{y}{x} + C$$

$L = P$

$$\ln|x| = \frac{y}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$C = \ln C_1, \quad C_1 > 0$$

$$\ln|x| = \frac{y}{x} + \ln C_1$$

$$\ln|x| - \ln C_1 = \frac{y}{x} \Rightarrow \ln \frac{|x|}{C_1} = \frac{y}{x}$$

4. Równanie różniczkowe postaci y' = f(ax + by +c)

Równania różniczkowe postaci $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$, gdzie $a \neq 0,\ b \neq 0$, funkcja f jest ciągła, sprowadzamy do równania o rozdzielonych zmiennych za pomocą podstawienia $u(x) = ax + by + c$.

Pamiętamy, że y jest funkcją $y(x)$.

Przykłady

1) $y' = x + y + 3$
2) $y' = (x + y)^2$

Ad. 1.

$y' = x + y + 3,$

podstawienie $u = x + y + 3 \Rightarrow y = u - x - 3$, $u = u(x)$

$y' = u' - 1$

$$u' - 1 = u$$

$$\frac{du}{dx} = u + 1 \quad \Big| : du$$

$$\frac{1}{dx} = \frac{u+1}{du} \Leftrightarrow dx = \frac{du}{u+1}$$

$$\int dx = \int \frac{du}{u+1}$$

$$x = \ln|u+1| + C$$

$$x = \ln|x+y+4| + C$$

$$x = \ln|x+y+4| + \ln C_1, \quad C_1 > 0$$

$$x = \ln C_1|x+y+4|$$

Ad. 2)

$y' = (x+y)^2$, podst. $u = x + y \Rightarrow y = u - x$

$y' = u' - 1$

$$u' - 1 = u^2$$
$$u' = u^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = u^2 + 1 \quad / \cdot \frac{dx}{u^2+1}$$
$$\frac{du}{u^2+1} = dx$$
$$x = \operatorname{arctg}(x+y) + C$$

5. Równanie różniczkowe postaci y' = f($\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$)

Przy rozwiązywaniu równań typu y'= f($\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$) rozróżniamy dwa przypadki:

1) $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$, np.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y-1}{-3x-y+5}$$

Rozwiązujemy układ:
$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -3x-y=-5 \end{cases}$$
$$W = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2+9 = 7 \neq 0$$
$$W_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -1+15 = 14$$
$x = 2$, $y = -1$

podst.:
$u = x-2$, $v = y+1$
$du = dx$, $dv = dy$

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u+3v}{-3u-v}$$

Wykonujemy podstawienie:
$$t = \frac{v}{u} \Rightarrow v = t \cdot u$$
$$v' = t' \cdot u + t$$

wtedy mamy
$$t'u + t = \frac{2+3t}{-3-t}$$
$$\frac{dt}{du} \cdot u = \frac{2+3t-t(-3-t)}{-3-t} \Rightarrow \frac{dt}{du} \cdot u = \frac{t^2+6t+2}{-3-t}$$
rozdzielamy zmienne

2) $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$, np.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+4y+3}{x+2y+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x+2y)+3}{(x+2y)+1}$$

podst.
$u = x + 2y$
$\frac{du}{dx} = 1 + 2\frac{dy}{dx}$

$$\frac{\frac{du}{dx} - 1}{2} = \frac{2u+3}{u+1}$$

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx} = \frac{2u+3}{u+1} + \frac{1}{2} \quad \Big| \cdot 2$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{4u+6+u+1}{u+1}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{5u+7}{u+1} \quad \Big| \cdot \frac{1}{du}$$

$$\frac{1}{dx} = \frac{5u+7}{u+1} \cdot \frac{1}{du}$$

$$dx = \frac{u+1}{5u+7} du$$

$\vdots$