

1. Elementy logiki i teorii mnogości

Oznaczenia

$\forall$ – kwantyfikator ogólny (dla każdego),

$\exists$ – kwantyfikator szczegółowy (istnieje),

$\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{N}$

$\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych, $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych, $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych, $\mathbb{R}$

$\mathbb{C}$ – zbiór liczb zespolonych, $\mathbb{C}$

$p, q, r, s, \dots$ – zdania logiczne

- 1. $p \vee q$ – alternatywa (p lub q)
- 2. $p \wedge q$ – koniunkcja (p i q)
- 3. $p \Rightarrow q$ – implikacja (jeżeli p, to q)
- 4. $p \Leftrightarrow q$ – równoważność (p wtedy i tylko wtedy, gdy q)
- 5. $\sim p$ – negacja (nie p)

Definicja 1.1 (Zdanie logiczne)

Zdaniem logicznym nazywamy wyrażenie, któremu można przypisać ocenę prawdy lub fałszu.

1. Alternatywa zdań p i q jest fałszywa tylko wtedy, kiedy oba zdania są fałszywe

p	q	$p \vee q$
0	1	1
0	0	0
1	1	1
1	0	1

2. Koniunkcja zdań p i q jest prawdziwa tylko wtedy, kiedy oba zdania są prawdziwe

p	q	$p \wedge q$
0	1	0
0	0	0
1	1	1
1	0	0

3. Implikacja dwóch zdań jest fałszywa tylko wtedy, kiedy poprzednik jest prawdziwy i następnik jest fałszywy

p	q	$p \Rightarrow q$
0	1	1
0	0	1
1	1	1
1	0	0

4. Równoważność

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	1	0
0	0	1
1	1	1
1	0	0

Definicja 1.2 (Tautologia)

Prawem logicznym nazywamy zdanie które jest zawsze prawdziwe. Udowadniamy za pomocą tabelki logicznej.

Przykłady tautologii:

Prawo podwójnego zaprzeczenia: $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$

Prawo wyłącznego środka: $p \vee \sim p$

Prawo sprzeczności: $\sim(p \wedge \sim p)$

Prawa De Morgana (rachunku zdań)

I : $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim q \vee \sim p$

II : $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim q \wedge \sim p$

Dowód prawa I

p	q						
0	0						
0	1						
1	0						
1	1						

Definicja 1.3 (Równość i zawieranie zbiorów)

A, B – zbiory

$A = B \Leftrightarrow \forall_x \ x \in A \Leftrightarrow x \in B;$

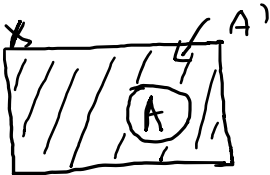
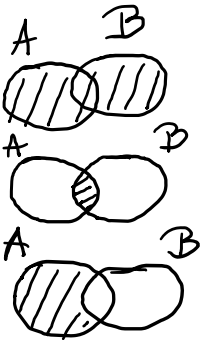
$A \subset B \Leftrightarrow \forall_x \ x \in A \Rightarrow x \in B.$

Definicja 1.4 (Działania na zbiorach)

$A \cup B := \{ x: x \in A \vee x \in B \}$ (suma zbiorów A i B)

$A \cap B := \{ x: x \in A \wedge x \in B \}$ (iloczyn zbiorów A i B)

$A \setminus B := \{ x: x \in A \wedge x \notin B \}$ – (różnica zbiorów A i B)



Definicja 1.5 (Dopełnienie zbioru)

Niech zbiór A należy do przestrzeni zbiorów X. Dopełnieniem zbioru A nazywamy różnicę $X \setminus A$ i oznaczamy przez A' .

Definicja 1.6 (Iloczyn kartezjański) Niech A, B należą do przestrzeni X.

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór uporządkowanych par (x, y) takich, że pierwszy element pary należy do zbioru A i drugi element pary należy do zbioru B. Iloczyn kartezjański oznaczamy przez $A \times B$,

$$A \times B = \{(x, y): x \in A \wedge y \in B\}.$$

Uwaga! Iloczyn kartezjański nie jest przemienny.

Przykład.

Dane są zbiory $A = \{0, 1, 5\}$ oraz $B = \{6, 9\}$. Wtedy iloczyny kartezjańskie $A \times B$ i $B \times A$ mają postać:

$$A \times B = \{(0, 6), (0, 9), (1, 6), (1, 9), (5, 6), (5, 9)\},$$

$$B \times A = \{(6, 0), (6, 1), (6, 5), (9, 0), (9, 1), (9, 5)\}.$$

Można tworzyć iloczyn kartezjański zbioru ze sobą, tzn. $X \times X$.

Przykładem może być $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, czyli płaszczyzna $\mathbb{R}^2$

Analogicznie, iloczyn kartezjański $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ jest trójwymiarową przestrzenią $\mathbb{R}^3$.

Definicja 1.7 (Iloczyn uogólniony zbiorów)

Iloczynem (przecięciem) uogólnionym rodziny zbiorów A nazywamy zbiór

$$\bigcap_{t \in T} A_t$$

taki, że x należy do tego zbioru wtedy i tylko wtedy, gdy x jest elementem każdego ze zbiorów rodziny A ,

$$x \in \bigcap_{t \in T} A_t \iff \forall_{k \in T} x \in A_k.$$

Definicja 1.8 (Suma uogólniona zbiorów)

Sumą uogólnioną rodziny zbiorów A nazywamy zbiór

$$\bigcup_{t \in T} A_t$$

taki, że x należy do tego zbioru wtedy i tylko wtedy, gdy x jest elementem co najmniej jednego ze zbiorów rodziny A ,

$$x \in \bigcup_{t \in T} A_t \iff \exists_{k \in T} x \in A_k$$

Zadanie. Znaleźć uogólnioną sumę i iloczyn zbiorów A_n , $n \in \mathbb{N}$, gdzie $A_n = \{x \in \mathbb{R} : x \leq n\}$.

-

2. Liczby zespolone – podstawowe definicje i własności

Definicja 2.1 (Liczba zespolona, płaszczyzna zespolona)

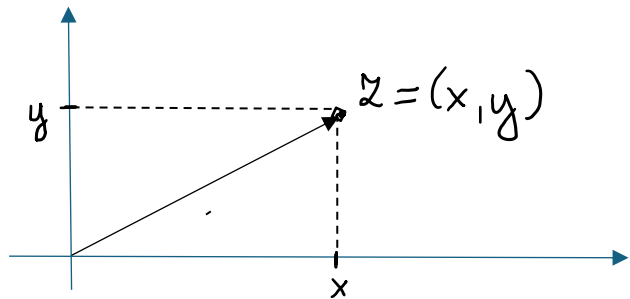
Liczbą zespoloną nazywamy uporządkowaną parę liczb rzeczywistych, np. (x, y) , (a, b) . Liczby zespolone oznaczamy przez z , ω , itp., tak więc $z = (x, y)$.

Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C}$,

$$\mathbb{C} := \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}.$$

Uwaga! Liczbę zespoloną z przedstawiamy na płaszczyźnie jako punkt o współrzędnych (x, y) lub w postaci wektora o początku w punkcie $(0, 0)$ i końcu w punkcie (x, y) .

Płaszczyznę liczb zespolonych nazywamy płaszczyzną Gaussa.



$$(x, y) = \overrightarrow{Oz} = [x, y]$$

wektor wodzący

Definicja 2.2 (Działania na liczbach zespolonych)

Niech $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ będą liczbami zespolonymi. (ale $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$)

1. Równość liczb zespolonych określamy następująco:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \{(x_1 = x_2) \wedge (y_1 = y_2)\}.$$

2. Sumę (różnicę) liczb zespolonych określamy wzorem:

$$z_1 \pm z_2 := (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2).$$

3. Iloczyn liczb zespolonych określamy wzorem:

$$z_1 z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2 ; x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

4. Iloraz liczb zespolonych określamy wzorem:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2}, \text{ gdzie } \frac{1}{z_2} = \left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2}, -\frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right), \quad z_2 \neq (0, 0)$$

Fakt 2.1 (Własności działań w zbiorze liczb zespolonych)

Niech z_1, z_2, z_3 będą dowolnymi liczbami zespolonymi. Wtedy:

1. Dodawanie jest przemienne, tzn.

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

2. Dodawanie jest łączne, tzn.

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

" $\therefore$ " ozn. z definicji

3. Dla każdej liczby zespolonej z i liczby zespolonej $0 := (0, 0)$, zachodzi równość

$$z + 0 = z.$$

4. Dla każdej liczby zespolonej $z = (x, y)$ oraz liczby $-z := (-x, -y)$ zachodzi równość

$$z + (-z) = 0.$$

5. Mnożenie liczb zespolonych jest przemienne, tzn.

$$z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

6. Mnożenie liczb zespolonych jest łączne, tzn.

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

7. Dla każdej liczby zespolonej z i liczby zespolonej $1 := (1, 0)$, zachodzi równość

$$z \cdot 1 = z$$

8. Mnożenie liczb zespolonych jest rozdzielne względem dodawania, tzn.

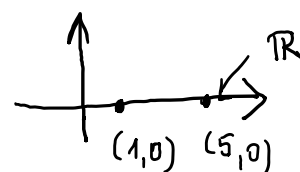
$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

$$5 = (5, 0) \\ 7 = (7, 0)$$

Uwaga! W zbiorze liczb zespolonych obowiązują wszystkie reguły dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, które są prawdziwe w zbiorze liczb rzeczywistych, np. wzory skróconego mnożenia, dwumian Newtona, wzory na sumę szeregu, itp.

Uwaga! Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest podzbiorem zbioru liczb zespolonych.

$$\mathbb{R} := \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}.$$



3. Postać algebraiczna liczby zespolonej

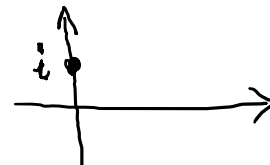
Definicja 3.1 (Jednostka urojona)

Liczbę zespoloną $(0, 1)$ nazywamy jednostką urojoną i oznaczamy przez i ,

$$i := (0, 1),$$

liczba i jest rozwiązaniem równania $z^2 + 1 = 0$.

$$i^2 = -1$$



Fakt 3.1 (Postać algebraiczna liczby zespolonej)

Każdą liczbę zespoloną można jednoznacznie zapisać w postaci

$$z = x + iy,$$

gdzie x i y są liczbami rzeczywistymi.

Definicja 3.2 (Część rzeczywista i część urojona liczby zespolonej)

Niech będzie dana liczba zespolona $z = x + iy$, gdzie x i y są liczbami rzeczywistymi.

Wtedy liczbę x nazywamy częścią rzeczywistą liczby zespolonej z (z jęz. łac. realis), co zapisujemy

$$\operatorname{Re} z := x.$$

Podobnie liczbę y nazywamy częścią urojoną liczby zespolonej z (z jęz. łac. imaginalis),



co zapisujemy

$$\operatorname{Im} z := y.$$

Liczbę zespoloną postaci yi , np. $2i$, $-i$, $3i$, będziemy nazywać czysto urojoną.

Wykonać podane działania:

➔ a) $(-2 + 3i) + (7 - 8i)$; b) $(4i - 3) - (1 + 10i)$; c) $5 - 5i$

d) $(\sqrt{2} + i) \cdot (3 - \sqrt{3}i)$; e) $\frac{2 - 3i}{5 + 4i}$.

b) $(4i - 3) - (1 + 10i) = \underline{4i} - 3 - 1 - \underline{10i} = -4 - 6i$

c) $(\sqrt{2} + i)(3 - \sqrt{3}i) = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}i + 3i - \sqrt{3}i^2 = \underline{\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + i(3 - \sqrt{3})}$

d) $\frac{2 - 3i}{5 + 4i} \cdot \frac{5 - 4i}{5 - 4i} = \frac{10 - 8i - 15i + 12i^2}{5^2 - (4i)^2} =$

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2$$

$$25 - 16i^2 = 25 + 16 = 41$$

$$= \frac{-2 - 23i}{41} = -\frac{2}{41} - \frac{23}{41}i$$

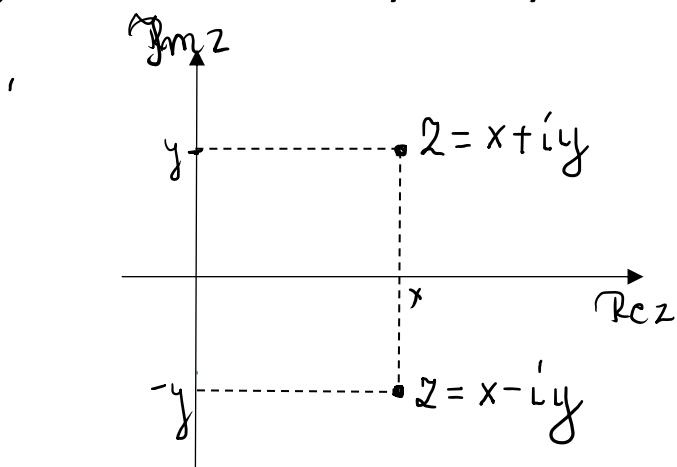
Uwaga! Działania na liczbach zespolonych w postaci algebraicznej (dodawanie, odejmowanie, mnożenie) wykonujemy dokładnie tak samo, jak dodawanie, odejmowanie, mnożenie wielomianów, przy warunku $i^2 = -1$.

Definicja 3.3 (Sprzężenie liczby zespolonej)

Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie x i y są liczbami rzeczywistymi, nazywamy liczbę zespoloną $\bar{z}$, określoną wzorem:

$$\bar{z} := x - iy.$$

Na przykład liczbą sprzężoną do $z = 2 + 3i$ jest $\bar{z} = 2 - 3i$. Tak więc, liczba sprzężona $\bar{z}$ jest obrazem liczby z w symetrii względem osi rzeczywistej.



Uwaga! W praktyce, dzieląc liczby zespolone dane w postaci algebraicznej $\frac{z_1}{z_2}$, gdzie $z_2 \neq 0$,

rozszerzamy ułamek $\frac{z_1}{z_2}$ mnożąc licznik i mianownik przez liczbę sprzężoną do liczby z_2

mianownika, tzn. $\bar{z}_2$.

Na przykład

$$a) \frac{2+3i}{1-i} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\frac{2+3i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i+3i+3i^2}{1^2 - (\underbrace{i}_{-1})^2} = \frac{-1+5i}{2} \quad (1-i)(1+i)$$

$$b) \quad \frac{2-i}{i-2} = \frac{(2-i)(-2-i)}{(-2-i)(i-2)} = \frac{-4 - 2i + 2i + i^2}{4 - i^2} = \frac{-5}{5} = -1 \quad \left(\begin{array}{l} z = i - 2 = -2 + i \\ \bar{z} = -2 - i \end{array} \right)$$

$$\frac{-(i-2)}{i-2} = -1$$

Fakt 3.2 (Własności sprzężenia liczby zespolonej)

Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, wtedy

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;
2. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$;
3. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$;
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, gdzie $z_2 \neq 0$;
5. $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$;
6. $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$;
7. $\overline{(\bar{z})} = z$;
8. $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im} z$.

Fakt 3.3 (O równości liczb zespolonych w postaci algebraicznej)

Dwie liczby zespolone z_1 oraz z_2 są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich części rzeczywiste i urojone są równe

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 \end{cases}$$

Zadania

1. Wykonaj działania na liczbach zespolonych $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 2 + 7i$

a) $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$;

b) $z_1 z_2$, $z_2 z_1$;

c) $\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{z_1}$.

Postać algebraiczna

$$z = x + iy,$$

x - część rzeczywista liczby z , $x \in \mathbb{R}$

y - część urojona liczby z , $y \in \mathbb{R}$

$$\bar{z} = x - iy \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$$

2. Oblicz wartości wyrażeń

a) $(2-i)(3+2i)-5i$,

e) $\frac{3-i}{i+2}$,

b) $5-(6+4i)-(3+2i)(3-2i)$,

f) $\frac{i^{15}(2-i)}{(1+i)^{23}}$,

c) $(1+2i)^2$,

g) $\frac{(1-i)^6(3-2i)^2}{(i-1)^{17}}$.

d) $(2-i)^3$,

4. Moduł i argument liczby zespolonej

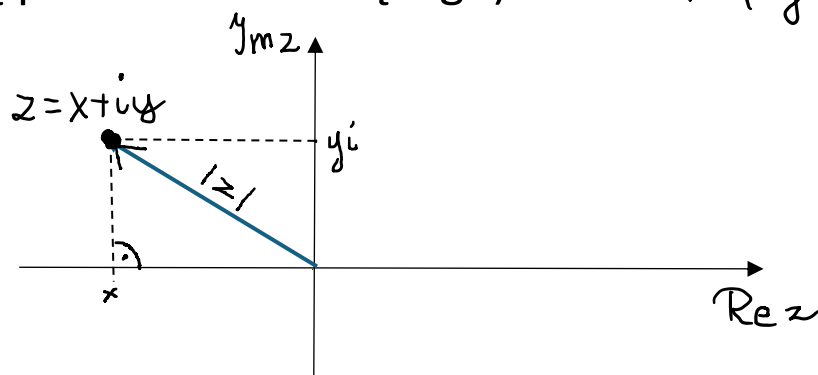
Definicja 4.1 (Moduł liczby zespolonej)

Modułem liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbę rzeczywistą $|z|$, ($r = |z|$) określoną wzorem

$$r = |z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Geometrycznie, moduł liczby zespolonej jest odległością punktu (x, y) od początku układu współrzędnych (długością promienia wodzącego). $\Rightarrow |z|$ jest liczbą nieujemną

$$|z| \in \mathbb{R}$$



Zadanie Obliczyć moduły liczb zespolonych:

a) $z_1 = -i, z_2 = -1 + 3i, z_3 = -5 - 12i$.

Albo $z_1 = -i$, $x_1 = 0$ i $y_1 = -1 \Rightarrow |z_1| = \sqrt{0^2 + (-1)^2}$
 $|z_1| = \sqrt{0+1} = 1$

a) $z_1 = -i$  $|z_1| = 1$

$z_1 = -i$
 $z_1 = 0 - i$
 $\operatorname{Re} z_1 = x = 0$ $\operatorname{Im} z_1 = -1$
 $\Downarrow$
 $|z_1| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

b) $z_2 = -1 + 3i$ $x = -1$ $y = 3$
 $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

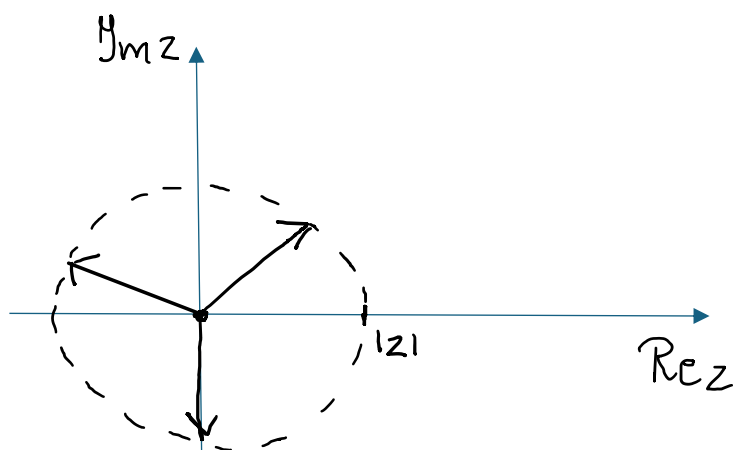
c) $|z_3| = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$

Fakt 4.1 (Własności modułu liczby zespolonej)

Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wtedy

1. $|z| = |\bar{z}| = |-z|$;
2. $z\bar{z} = |z|^2$;
3. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$;
4. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, o ile $z_2 \neq 0$;
5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; $\leftarrow$ warunek trójkąta
6. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$;
7. $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$;
8. $|\operatorname{Re} z_1 z_2| \leq |z_1| |z_2|$.

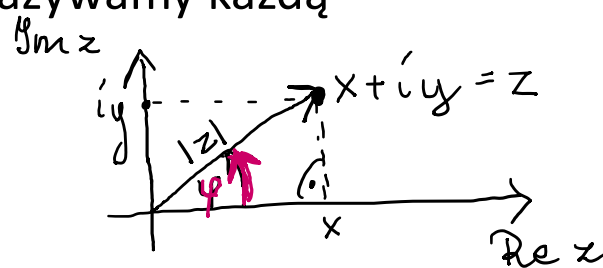
$\operatorname{Re} z$ - część rzeczywista
liczby z (x)
 $\operatorname{Im} z$ - część urojona
liczby z (y)



Definicja 4.2 (Argument liczby zespolonej)

Argumentem liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ i $z \neq 0$, nazywamy każdą

liczbę $\varphi \in \mathbb{R}$ spełniającą układ równań

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{|z|} \\ \sin \varphi = \frac{y}{|z|} \end{cases}$$


Przyjmujemy, że argumentem liczby $z = 0$ jest każda liczba $\varphi \in \mathbb{R}$.

Argumentem głównym liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy argument φ tej liczby,

spełniający nierówność $0 \leq \varphi < 2\pi$ i oznaczamy go przez $\arg z$.

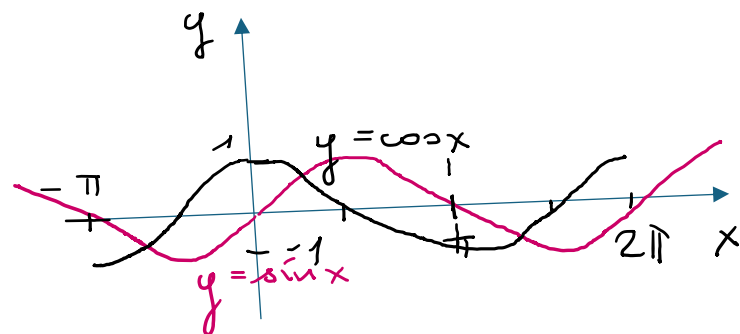
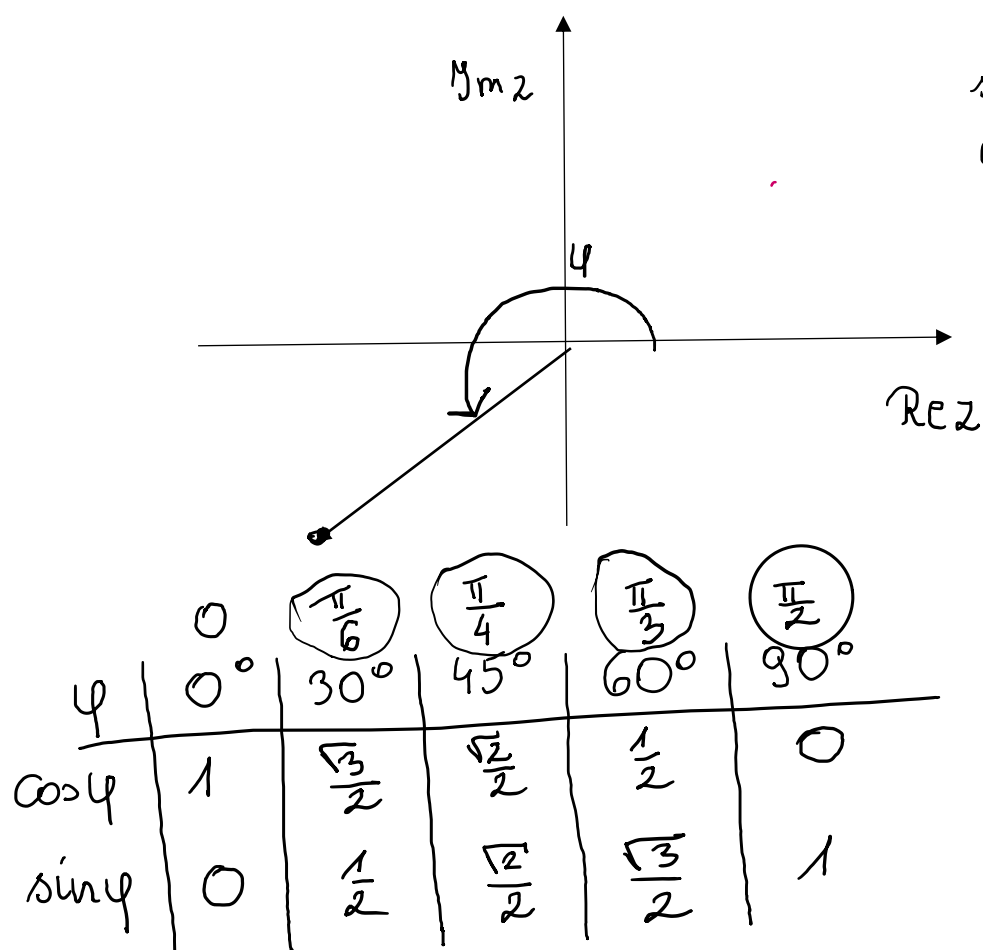
Przyjmujemy, że argumentem głównym liczby $z = 0$ jest $\varphi = 0$.

Każdy argument φ liczby zespolonej $z \neq 0$ ma postać

$$\varphi = \arg z + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Powtórzyć wartości
funkcji sinus x oraz
cosinus x

$\sin x$ - f-ja nieparzysta: $\sin(-x) = -\sin x$
 $\cos x$ - f-ja parzysta: $\cos(-x) = \cos x$



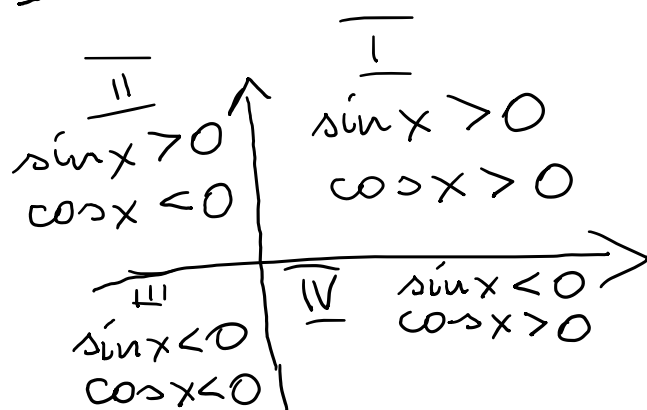
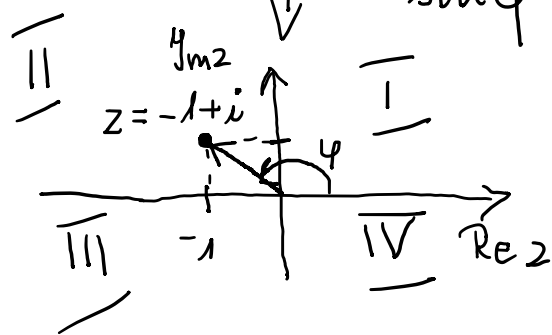
Moduł i argument główny określają jednoznacznie liczbę zespoloną z .

Przykłady

a) $z = -1 + i$

$x = -1 \quad y = 1 \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$

$\cos \varphi = \frac{x}{|z|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\sin \varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

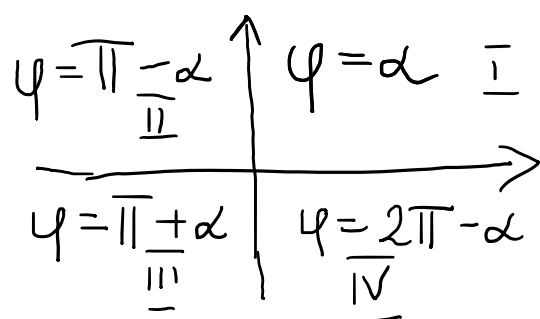


2° wyznaczamy

kąt α (ostry), dla którego $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \setminus \alpha = \frac{\pi}{4}$
 $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} /$

3°

$\varphi = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$



$$b) \quad z = 1 - \sqrt{3}i$$

$$x=1, \quad y=-\sqrt{3} \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

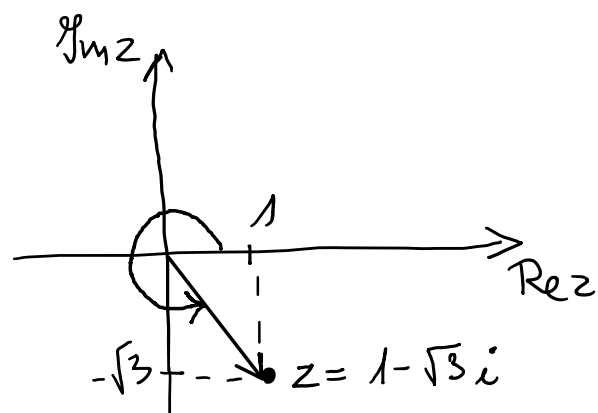
$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{1}{2} \quad \backslash \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad /$$

W której ćwiartce układu jest linba z ?

IV

$$\varphi = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$$



Napisać postać trygonometryczną linby zespolonej:

$$1) \quad z = -1 + i$$

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$|z| = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \frac{3}{4}\pi$$

$$\underline{z = \sqrt{2}(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i \sin(\frac{3}{4}\pi))}$$

$$2) \quad z = 1 - \sqrt{3}i$$

$$|z| = 2$$

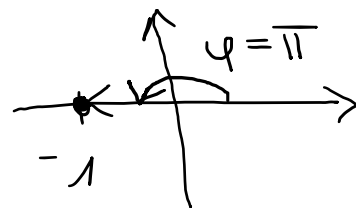
$$\varphi = \frac{5}{3}\pi$$

$$\underline{z = 2(\cos(\frac{5}{3}\pi) + i \sin(\frac{5}{3}\pi))}$$

$$3) \quad z = -1$$

$$x=-1, \quad y=0 \Rightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \varphi = -1 \\ \sin \varphi = 0 \end{array} \right\} \varphi = \pi$$



$$\underline{z = 1(\cos \pi + i \sin \pi)}$$