Ćwiczenia nr 11

środa, 19 maja 2021

7 ← z. popr. ćwiczeń

Rozwiązać r-nie różniczkowe z danym warunkiem początkowym:

$$2\sqrt{y} = y' \quad \text{dla} \quad x = 0 \text{ i } y = 1$$

(Wyznaczyć równanie krzywej całkowej przechodzącej przez punkt $(0,1)$)

(Znaleźć rozwiązanie szczególne)

$$2\sqrt{y} = \frac{dy}{dx} \quad \Big/ \cdot dx \qquad y > 0$$

$$2\sqrt{y}\,dx = dy \quad \Big/ : 2\sqrt{y}, \quad y \neq 0$$

$$dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$$

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx \implies \underbrace{\sqrt{y} = x + C}_{\text{rozwiązanie ogólne r-nia (całka ogólna)}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Jeśli $x = 0$ i $y = 1 \implies \sqrt{1} = 0 + C \implies C = 1$

Tak więc $\underbrace{\sqrt{y} = x + 1}_{\text{rozwiązanie szczególne (całka szczególna)}}$

(krzywa całkowa o r-niu $\sqrt{y} = x+1$)

Naszkicować otrzymaną krzywą całkową:

Naszkicować otrzymaną krzywą całkową:

$$\sqrt{y} = x + 1$$

Zad. 1.
Rozwiązać r-nie różniczkowe stosując odpowiednie podstawienie

(1) $y' = 3x - 2y + 1$

$\frac{dy}{dx} = 3x - 2y + 1 \quad / \cdot dx$

$dy = (3x - 2y + 1)\,dx$ – zmiennych nie można rozdzielić

Podstawienie: $u = 3x - 2y + 1$ (Uwaga! u jest funkcją zmiennej x)

Różniczkujemy po „x": $\frac{du}{dx} = 3 - 2\frac{dy}{dx}$

Wyznaczamy z równania $\frac{dy}{dx}$:

$$2\frac{dy}{dx} = 3 - \frac{du}{dx} \quad \Big| : 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{du}{dx}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{du}{dx} = u \quad / \cdot 2$$

Rozdzielamy „u" oraz „x":

$$3 - \frac{du}{dx} = 2u$$

$$\frac{du}{dx} = 3 - 2u \quad / \cdot dx$$

$$du = (3 - 2u)\,dx \quad / : 3 - 2u$$

du

$$du = (3-2u)\,dx \quad /\cdot \frac{1}{3-2u}$$

$$\frac{du}{3-2u} = dx \quad , \quad u \neq \frac{3}{2}$$

$$\int \frac{du}{3-2u} = \int dx$$

$$L = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\ln\left|u-\frac{3}{2}\right| + C$$

$$\boxed{\ln_a b = c \iff a^c = b}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|u-\frac{3}{2}\right| = x + C \quad /(-2)$$

$$\ln\left|u-\frac{3}{2}\right| = -2x + C$$

$$\ln\left|3x-2y+1-\frac{3}{2}\right| = -2x + C$$

$$\ln\left|3x-2y-\frac{1}{2}\right| = -2x + C$$

$$\left|3x-2y-\frac{1}{2}\right| = e^{-2x+C}$$

$$\left|3x-2y-\frac{1}{2}\right| = e^{-2x}\cdot \underbrace{e^{C}}_{C_1>0}$$

$$3x-2y-\frac{1}{2} = \underbrace{\pm C_1}_{C_2\neq 0} e^{-2x}$$

$$-2y = C_2 e^{-2x} - 3x + \frac{1}{2} \quad /:(-2)$$

$$y = C_2 e^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$$

(2) $y' = \sin(x-y)$

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x-y) \quad , \quad u = x-y$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x-y) \quad , \quad u = x-y$$

$$\frac{du}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{du}{dx}$$

$$\Downarrow$$

$$1 - \frac{du}{dx} = \sin u$$

Rozdzielamy zmienne:

$$1 - \sin u = \frac{du}{dx} \quad \Big| : du$$

$$\frac{1-\sin u}{du} = \frac{1}{dx}$$

$$\frac{du}{1-\sin u} = dx$$

$$x = \int \frac{du}{1-\sin u}$$

Podstawienie uniwersalne

$$\left\{ \begin{array}{ll} t = \operatorname{tg}\frac{u}{2} & \sin u = \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{u}{2} = \operatorname{arctg} t & \cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ u = 2\operatorname{arctg} t & \\ du = \frac{2}{1+t^2}dt & \end{array} \right\}$$

$$\int \frac{du}{1-\sin u} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{1-\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{1+t^2-2t} = 2\int \frac{dt}{(t-1)^2} = 2\cdot\left(-\frac{1}{t-1}\right) + C = \frac{-2}{\operatorname{tg}\frac{u}{2}-1} + C$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2}{\operatorname{tg}\frac{u}{2}-1} + C \quad , \quad u = x-y$$

$$x = \frac{-2}{\operatorname{tg}\frac{u}{2} - 1} + C \quad , \quad u = x - y$$

$$x = \frac{-2}{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} - 1} + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

(3)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{(x+y)^2}$$

$$u = x + y$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{4}{u^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{4}{u^2} + 1 \quad \Big| \cdot du$$

$$\frac{1}{dx} = \frac{\frac{4}{u^2} + 1}{du} \qquad dx = \frac{du}{\frac{4}{u^2} + 1}$$

$$\int dx = \int \frac{du}{\frac{4+u^2}{u^2}} = \int \frac{u^2\,du}{u^2+4}$$

$$t = \frac{u}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 2t \\ du = 2dt \\ \int \frac{2\,dt}{4t^2+4} = \\ = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} \end{array} \right\}$$

$$x = \int \frac{u^2+4-4}{u^2+4}\,du = \int du - 4\int \frac{1}{u^2+4}\,du =$$

$$= u - 4 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\frac{u}{2}$$

$$x = x + y - 2\operatorname{arctg}\frac{x+y}{2} + C$$

$$y = 2\operatorname{arctg}\frac{x+y}{2} + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+y}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

4

$$2x+3y-1+(4x+6y-5)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$u = 2x+3y-1 \implies 4x+6y-5 = 2u-3$$

$$\frac{du}{dx} = 2 + 3\frac{dy}{dx} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\frac{du}{dx} - \frac{2}{3}$$

$$u + (2u-3)\left(\frac{1}{3}\frac{du}{dx} - \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$(2u-3)\left(\frac{1}{3}\frac{du}{dx} - \frac{2}{3}\right) = -u \quad \Big| : 2u-3$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{du}{dx} - 2\right) = \frac{-u}{2u-3} \quad \Big| \cdot 3$$

$$\frac{du}{dx} - 2 = \frac{-3u}{2u-3}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-3u}{2u-3} + 2$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-3u+2(2u-3)}{2u-3} = \frac{u-6}{2u-3} \quad \Big| : du$$

$$\frac{1}{dx} = \frac{u-6}{(2u-3)du} \qquad dx = \frac{2u-3}{u-6}\,du$$

$$\int dx = \int \frac{2u-3}{u-6}\,du$$

$$x = 2\int \frac{u-\frac{3}{2}}{u-6}\,du = 2\left(\int \frac{\overset{-\frac{12}{2}}{(u-6)} + \frac{9}{2}}{u-6}\right)du = 2\left(\int du + \frac{9}{2}\int \frac{du}{u-6}\right) = 2\int du + 9\int \frac{du}{u-6}$$

$$x = 2u + 9\ln|u-6| + C$$

$$x = 2(2x+3y-1) + 9\ln|2x+3y-7| + C$$

$$-6y = 3x - 2 + 9\ln|2x+3y-7| + C$$

5

$$(y-2x)y' = 2y+x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y+x \,|:x}{y-2x\,|:x}, \quad y \neq 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\frac{y}{x}+1}{\frac{y}{x}-2} \qquad \left(y' = f\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

r-nie jednorodne

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow \boxed{y = u \cdot x},$$

Uwaga! u jest f-cją „x"

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u$$

$$\frac{du}{dx}x + u = \frac{2u+1}{u-2}$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{2u+1}{u-2} - u$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{2u+1-u^2+2u}{u-2} \quad \Big| : du$$

$$\frac{x}{dx} = \frac{1+4u-u^2}{(u-2)du}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{u-2}{1+4u-u^2}du$$

$$\frac{\ }{x} = \frac{\ }{1+4u-u^2}\,du$$

$$\int \frac{dx}{x} = \underbrace{\int \frac{u-2}{-u^2+4u+1}\,du}_{J}$$

$$\ln x = J$$

R-nia różniczkowe liniowe