Ćwiczenia nr 10

środa, 12 maja 2021

Rozwiązać r-nia różniczkowe (wyznaczyć rozwiązanie ogólne)

(1) $2x^2 y' = y \iff 2x^2 \frac{dy}{dx} = y$ $\boxed{y=f(x)}$ wyznaczyć

Równanie o rozdzielonych zmiennych ($g(x)\cdot dx = h(y)\cdot dy$)

$2x^2\frac{dy}{dx}=y$

rozdzielamy zmienne przez podzielenie obu stron przez dy

$2x^2\frac{1}{dx}=\frac{y}{dy}$

$\frac{2x^2}{dx}=\frac{y}{dy} \iff \frac{dx}{2x^2}=\frac{dy}{y}$

Po rozdzieleniu zmiennych obliczamy całki: $\int\frac{dx}{2x^2}=\int\frac{dy}{y}$

$\frac12\int\frac{dx}{x^2}=\int\frac{dy}{y}$ $\overbrace{C_1-C}^{C_2}$

$-\frac{1}{2x}+C=\ln|y|+C_1$

Umowa: dopisujemy stałą C tylko po jednej stronie równania

$-\frac{1}{2x}=\ln|y|+C$, $C\in\mathbb{R}$

$\ln|y|=-\frac{1}{2x}\underbrace{-C}_{C_1\in\mathbb{R}} \iff \ln|y|=\underbrace{-\frac{1}{2x}+C}_{b}$,

$|y|=e^{-\frac{1}{2x}+C}$

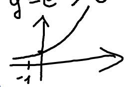
$|y|=e^{-\frac{1}{2x}}\cdot\underbrace{e^{C}}_{C_1>0}$

def:

$\ln a = b \iff e^b = a$

$e^{a+b}=e^a\cdot e^b$

$y=e^x>0$



$|y|=C_1\cdot e^{-\frac{1}{2x}}$

$y=\underbrace{\pm C_1}_{C_2\neq 0}\cdot e^{-\frac{1}{2x}}$

$y=C_2\cdot e^{-\frac{1}{2x}}$, $\boxed{C_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}$

$y'=\frac{dy}{dx}$

lub

$2x^2\frac{dy}{dx}=y \quad |\cdot dx$

$2x^2\,dy=y\,dx \quad |:x^2,\ x\neq 0$

$2\,dy=\frac{y\,dx}{x^2} \quad |:y,\ y\neq 0$

$\frac{2}{y}\,dy=\frac{dx}{x^2} \quad |\cdot 2$

$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{2x^2}$

Sprawdźmy czy r-nie (1) jest spełnione gdy $C_2 = 0$?

Wtedy $y = 0$, to $y' = 0$

Wstawiając do równania otrzymujemy $0 = 0$ więc ostatecznie

$$\underbrace{y = C \cdot e^{-\frac{1}{2x}}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

vozwiązanie ogólne (całka ogólna r-nia (1))

(2) $x^2 y' + y - 1 = 0$

$x^2 \frac{dy}{dx} = 1 - y \quad / \cdot dx$ lub $x^2 \frac{dy}{dx} = 1 - y \quad / : dy$

$x^2 \frac{dy}{dx} \cdot dx = (1-y)\,dx \qquad \frac{x^2}{dx} = \frac{1-y}{dy} \iff \frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{1-y}$

$x^2 dy = (1-y)\,dx \quad / \cdot \frac{1}{x^2}$, $\underset{\sim\sim}{x \neq 0}$

$dy = \frac{(1-y)dx}{x^2} \quad / \cdot \frac{1}{(1-y)}$, $y \neq 1$

$\frac{dy}{1-y} = \frac{dx}{x^2}$

Czy $y = 1$ nie jest czasem rozwiązaniem szczególnym r-nia (2)?

$y = 1 \Rightarrow y' = 0$

$x^2 \cdot 0 + 1 - 1 = 0$ Tak, $y = 1$ - rozwiązanie

Całkujemy:

$\int \frac{dy}{1-y} = \int \frac{dx}{x^2}$

$$\int \frac{dy}{1-y} = \left| \begin{array}{l} 1-y = t \\ -dy = dt \\ dy = -dt \end{array} \right| = \int \frac{-dt}{t} = -\int \frac{1}{t}\,dt = -\ln t + C = -\ln|1-y| + C$$

lub

$-\int \frac{dy}{y-1} = -\ln|y-1| + C$

$-\ln|1-y| = -\frac{1}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$

$\ln|1-y| = \frac{1}{x} + C$

$|1-y| = e^{\frac{1}{x} + C}$

$|1-y| = e^{\frac{1}{x}} \cdot \underbrace{e^C}_{C_1 > 0}$

$|1-y| = C_1 e^{\frac{1}{x}}$

$1 - y = \pm C_1 e^{\frac{1}{x}}, \quad \pm C_1 = C_2 \neq 0$

$1 - y = C_2 e^{\frac{1}{x}}$

$-y = C_2 e^{\frac{1}{x}} - 1 \iff y = C_2 e^{\frac{1}{x}} + 1$

$(C_2 = 0 \Rightarrow y = 1$ - rozw. szczególne$)$

$$\underbrace{y = Ce^{\frac{1}{x}} + 1}$$

(3) $xy' + 1 = x^3 - y'$

$xy' + y' = x^3 - 1 \iff y'(x+1) = x^3 - 1 \quad / : (x+1)$

$\frac{dy}{\ldots} \quad \frac{x^3 - 1}{\ldots}$

(3) $xy' + 1 = x^3 - y'$

$$xy' + y' = x^3 - 1 \iff y'(x+1) = x^3 - 1 \quad \Big/ : (x+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3-1}{x+1} \quad \Big| \cdot dx$$

$$dy = \frac{x^3-1}{x+1}\,dx$$

$$\int dy = \int \frac{x^3-1}{x+1}\,dx$$

$$y = \int \frac{x^3-1}{x+1}\,dx$$

$$(x^3-1):(x+1) = x^2 - x + 1$$
$$\underline{-x^3 - x^2}$$
$$= -x^2 - 1$$
$$\underline{x^2 + x}$$
$$\underline{x - 1}$$
$$\underline{-x-1}$$
$$-2$$

$$(x^3-1):(x+1) = x^2 - x + 1 - \frac{2}{x+1}$$

$$y = \int \left(x^2 - x + 1 - \frac{2}{x+1}\right) dx$$

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 2\ln|x+1| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(4) $(y')^2 + x^2 = 1$

$$y' = \pm\sqrt{1-x^2} \qquad x \in \langle -1, 1\rangle$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-x^2} \quad \Big/ \cdot dx$$

$$dy = \pm\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$\int dy = \pm\int\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$y = \pm\underbrace{\int\sqrt{1-x^2}\,dx}_{\mathcal{Y}}$$

$$\mathcal{Y} = \int\sqrt{1-x^2}\,dx = \int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \underbrace{\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{\mathcal{Y}_1}$$

$$\int\frac{f'}{\sqrt{f}} = 2\sqrt{f}$$

$$\underbrace{\int\sqrt{1-x^2}\,dx}\, = \arcsin x - \mathcal{Y}_1$$

$$\mathcal{Y}_1 = \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left\{\begin{matrix} f = x & g' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ f' = 1 & g = -\sqrt{1-x^2} \end{matrix}\right\} =$$

$$= -x\sqrt{1-x^2} + \underbrace{\int\sqrt{1-x^2}\,dx}_{\mathcal{Y}}$$

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \arcsin x - \left(-x\sqrt{1-x^2} + \int\sqrt{1-x^2}\,dx\right)$$

$$2\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2}$$

$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C = y \qquad C\in\mathbb{R}$

$$y = \pm\frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C$$

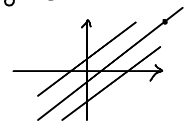
(5) $\sin x\cdot\cos y - \cos y\,\sin x\,\frac{dy}{dx} = 0$

$-\cos y\,\sin x\,\frac{dy}{dx} = -\sin x\cos y \quad \Big|:(-\sin x\cos y)$

$\frac{dy}{dx} = 1 \quad |\cdot dx$

$dy = dx \qquad \int dy = \int dx$

$$y = x + C$$



(6) $\sin x\cos y - \cos x\,\sin y\,\frac{dy}{dx} = 0$

$\ln|\cos y| = \ln|\cos x| + C, \quad C\in\mathbb{R}$

$\ln|\cos y| = \ln|\cos x| + \ln C_1, \quad C_1 > 0$

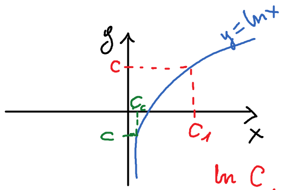
$\ln|\cos y| = \ln C_1|\cos x|$

$|\cos y| = C_1|\cos x|$

$\cos y = \pm C_1\cos x$

$\cos y = C_2\cos x, \quad C_2 \neq 0$

gdy $C_2 = 0 \Rightarrow \cos y = 0$



$\boxed{\ln a + \ln b = \ln(a\cdot b)}$

$\ln C_1 = C$

$\ln C_1 = C$

$C_1 > 0$

(7) Rozwiązać r-nie różniczkowe z danym warunkiem początkowym:

$2\sqrt{y} = y'$ dla $\boxed{x = 0 \text{ i } y = 1}$

(Wyznaczyć równanie krzywej całkowej przechodzącej przez punkt (0,1))

(Znaleźć rozwiązanie szczególne)

1° znajdziemy rozwiązanie ogólne, jak w zad. (4)–(6)

2° do rozw. ogólnego podstawimy $x=0$ oraz $y=1$ i wyznaczymy wartość C