Pochodne cząstkowe i ekstrema lokalne

1. Obliczyć pochodne cząstkowe I rzędu względem każdej zmiennej występującej w danej funkcji:

a) $u = xy^2z^3 - y\sin z$

b) $u = x\sqrt{y} - e^z \ln y$

c) $f(x,y) = x^{\sqrt{y}}$

d) $z = \ln(x + \ln y)$

e) $f(x,y) = x^y \cdot y^x$

f) $f(x,y) = (\sin x)^{\ln y}$

g) $f(x,y) = (1+xy)^y$

h) $u = x^{\frac{1}{y}} \cdot z$

2. Wykazać, że

a) funkcja $u = x^y \cdot y^x$ spełnia równanie $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = (x + y + \ln u)u$;

b) funkcja $u = e^{\frac{x}{y^2}}$ spełnia równanie $2x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

3. Obliczyć pochodne cząstkowe II rzędu funkcji:

a) $z = \sin^2(x+y)$,

b) $z = \ln(x^2 + y)$,

c) $z = \arcsin\frac{x-y}{x}$,

d) $u = \sqrt{2xy + y^2}$,

e) $u = y^{\ln x}$.

4. Wyznaczyć (o ile istnieją) ekstrema lokalne funkcji

a) $f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 - x + 4y - 5$,

b) $f(x,y) = x^2 - 6xy + y^3 + 3x + 6y$,

c) $f(x,y) = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$,

d) $f(x,y) = xy^2(1-x-y)^3$.