Matematyka 2

Wykład nr 7

Równania różniczkowe liniowe rzędu pierwszego

1. Równanie liniowe jednorodne

Definicja 1.1

Równaniem różniczkowym liniowym rzędu pierwszego nazywamy równanie

$$y' + p(x)y = q(x), \quad RN$$

gdzie funkcje p i q są określone i ciągłe na wspólnym przedziale $I \in \mathbb{R}$.

Jeżeli $q(x) = 0$, dla każdego $x \in I$, to równanie

$$y' + p(x)y = 0 \quad RJ$$

nazywa się równaniem liniowym jednorodnym (RJ), w przeciwnym przypadku równanie nazywa się równaniem liniowym niejednorodnym (RN).

Niech dane będzie równanie jednorodne

$$RJ \quad y' + p(x)y = 0.$$

Jedną z linii całkowych tego równania jest

$$y = 0.$$

$$\begin{cases} y_0 = 0 \Rightarrow y_0' = 0 \\ y_0' + p(x)\cdot y_0 = 0 \end{cases}$$

całka szczególna RJ

Załóżmy teraz, że $y \neq 0$.

Wtedy zmienne dadzą się rozdzielić

$$y' = -p(x)y,$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y,$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx, \quad \leftarrow \text{zmienne rozdzielone}$$

Całkujemy obie strony i otrzymujemy

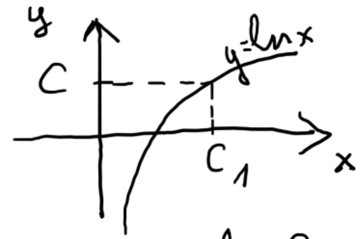
$$ln|y| = -\int p(x)\,dx.$$

Niech $\int p(x)\,dx = P(x) + C$, wtedy mamy

f-ja pierwotna funkcji p(x)

$$ln|y| = -P(x) + C.$$

$C \in \mathbb{R}$



$\ln C_1 = C$

$$\ln|y| - \overbrace{\ln|C_1|}^{C} = -P(x),$$

$$\ln\left|\frac{y}{C_1}\right| = -P(x),$$

$C_1 > 0$

$\left|\frac{y}{C_1}\right| = e^{-P(x)}$

$|y| = |C_1| \cdot e^{-P(x)}$

$y = C_2 e^{-P(x)}$

$C_2 \neq 0$

nie zawiera całki $y=0$

Z definicji logarytmu mamy

$$|y| = e^{-P(x)+C},$$

$$|y| = e^{-P(x)}\, e^{C}.$$

Podstawiamy następnie

$$e^{C} = C_1, \text{ gdzie } C_1 > 0,$$

co daje

$$|y| = C_1\, e^{-P(x)},$$

$$y = C_2\, e^{-P(x)}, \text{ gdzie } C_2 \neq 0.$$

Ostatecznie

całka $y=0$ zawiera się

$$y = C e^{-P(x)}, \text{ gdzie } C \in \mathbb{R}. \quad \textbf{(CORJ)}$$

CORJ – całka ogólna równania jednorodnego

Przykłady

1) $y' + \frac{1}{x^2} y = 0.$
2) $y' = y\, tg\, x.$

Ad. 1) $y' = -\frac{1}{x^2} y$ $\qquad y = 0 \leftarrow$ całka szczególna r-nia 1)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \cdot y \;\Big|\cdot \frac{dx}{y}, \quad y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{x^2}\, dx \leftarrow \text{zmienne rozdzielone}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{1}{x^2}\, dx$$

$L = \ln|y|$ $\qquad P = -\int x^{-2}\, dx = x^{-1} + C = \frac{1}{x} + C, \; C \in \mathbb{R}$

$$\ln|y| = \frac{1}{x} + C$$

Z definicji log. naturalnego:

$$|y| = e^{\frac{1}{x} + C}$$

$$|y| = e^{\frac{1}{x}} \cdot \underbrace{e^{C}}_{C_1}, \quad C_1 > 0$$

$$|y| = C_1 e^{\frac{1}{x}}$$

$$y = \pm C_1 e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y = C_2 e^{\frac{1}{x}}, \quad C_2 \neq 0$$

Ostatecznie $y = Ce^{\frac{1}{x}}, \quad C \in \mathbb{R}$

2) $y' = y\,\mathrm{tg}\,x$

$$\frac{dy}{dx} = y\,\mathrm{tg}\,x \quad / \cdot \frac{dx}{y}, \quad y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y} = \mathrm{tg}\,x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$\ln|y| = \ln|\cos x| + \underbrace{C}_{\ln C_1}, \quad C_1 > 0$$

$$\ln|y| = \ln|\cos x| + \ln C_1 \Rightarrow \ln|y| = \ln C_1|\cos x|$$

$$|y| = C_1|\cos x|$$

$$y = C_2 \cos x, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\ln|y| - \ln|\cos x| = C$$

$$\ln\left|\frac{y}{\cos x}\right| = C \qquad \underbrace{e^{C}}_{C_1 > 0}$$

$$\left|\frac{y}{\cos x}\right| = e^{C}$$

$$|y| = C_1|\cos x|$$

2. Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne – metoda uzmienniania stałej

Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (RN)$$

rozwiązujemy tzw. metodą współczynników nieoznaczonych.

1 W tym celu najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne, czyli

$$y' + p(x)y = 0.$$

Całką ogólną równania jednorodnego jest

$$y = Ce^{-P(x)}. \quad \text{(CORJ)}$$

2 Następnie stałą C zastępujemy funkcją $C(x)$ tak dobraną, żeby funkcja

$$(1) \qquad y = C(x) \cdot e^{-P(x)}$$

była całką równania niejednorodnego.

Obliczamy pochodną (1)

$$+ \; C(x) \cdot e^{-P(x)} \cdot (-P'(x))$$

$$y' = C'(x)e^{-P(x)} - C(x)e^{-P(x)}\underbrace{P'(x)}_{p(x)},$$

czyli

$$(2) \qquad y' = C'(x)e^{-P(x)} - C(x)e^{-P(x)}p(x).$$

Teraz wstawiamy do równania wyjściowego y oraz y' ((1) i (2)).

$$\boldsymbol{y'} + p(x)\boldsymbol{y} = q(x),$$

$$\boldsymbol{C'(x)e^{-P(x)}} - \cancel{\boldsymbol{C(x)e^{-P(x)}p(x)}} + \cancel{p(x)\,\boldsymbol{C(x)\,e^{-P(x)}}} = q(x).$$

! Jeżeli poprawnie wykonamy powyższe działania, elementy zawierające funkcję $C(x)$ upraszczają się (zawsze). ($C(x)$ - znika)

Otrzymujemy równanie

$$C'(x)e^{-P(x)} = q(x). \;\Big|\cdot e^{P(x)}$$

Tak więc

$$C'(x) = q(x)e^{P(x)},$$

całkujemy:

$$C(x) = \int q(x)e^{P(x)}dx.$$

Wykonujemy całkowanie i otrzymaną funkcję $C(x)$ wstawiamy do równania

$$(1) \qquad y = C(x)\,e^{-P(x)}. \quad \text{(CORN)} \text{ - ostateczne rozwiązanie}$$

W ten sposób otrzymaliśmy szukaną całkę ogólną równania niejednorodnego **(CORN).**

$$\boxed{y' + p(x)\cdot y = q(x)}$$

Przykłady

1) $y' - 2xy = x - x^3$.
2) $y' \sin x + y\cos x = \sin 2x$.

Ad. 1. $\quad y' - 2xy = x - x^3 \qquad p(x) = -2x$

$q(x) = x - x^3$

1) Zajmujemy się równaniem jednorodnym

$$y' - 2xy = 0$$

Rozdzielamy zmienne

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$$

$$\ln|y| = x^2 + C$$

$$|y| = e^{x^2}\cdot \underbrace{e^C}_{C_1},\quad C_1 > 0$$

$$|y| = C_1 e^{x^2}$$

CORJ: $\quad y = Ce^{x^2},\ C\in\mathbb{R}$

2) uzmienniamy stałą C, niech $C = \underbrace{C(x)}_{\text{funkcja zmiennej } x}$

CORJ: $\quad y = C(x)\cdot e^{x^2}$

Obliczamy $y' = C'(x)\cdot e^{x^2} + C(x)\cdot e^{x^2}\cdot 2x$

Następnie y oraz y' wstawiamy do równania 1):

$$y' - 2xy = x - x^3$$

$$\underbrace{C'(x)e^{x^2} + \cancel{2C(x)xe^{x^2}}}_{y'} - \cancel{2x\cdot} \underbrace{\cancel{C(x)e^{x^2}}}_{y} = x - x^3$$

$$C'(x)e^{x^2} = x - x^3$$

$$C'(x) = \frac{x - x^3}{e^{x^2}} \Rightarrow C(x) = \underbrace{\int\frac{x - x^3}{e^{x^2}}\,dx}_{J}$$

$$y_1 = \int \frac{x}{e^{x^2}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t \\ x\,dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}dt}{e^t} = \frac{1}{2}\int e^{-t}dt = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

$$y_2 = \int \frac{x^3}{e^{x^2}}\,dx = \int \frac{x^2 \cdot x\,dx}{e^{x^2}} =$$

$$= \int \frac{t \cdot \frac{1}{2}dt}{e^t} = \frac{1}{2}\int t e^{-t}dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} f = t & g' = e^{-t} \\ f' = 1 & g = -e^{-t} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-te^{-t} + \int e^{-t}dt\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + C_1$$

$$C(x) = y_1 - y_2$$

$$C(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C$$

$$C(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + C$$

wracamy do CORJ: $y = C(x)\,e^{x^2}$

$$y = \left(\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + C\right)e^{x^2}$$

$$\underline{y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 + Ce^{x^2}}$$

CORN

2) $y'\sin x + \cos x \cdot y = \sin 2x \;|:\sin x$ $\quad y' + p(x)\cdot y = q(x)$

$$y' + \frac{\cos x}{\sin x}\cdot y = \frac{2\sin x\cos x}{\sin x}$$

$$\underbrace{y' + \frac{\cos x}{\sin x}\cdot y = 2\cos x}\ \text{RN}$$

(1) RJ: $\frac{dy}{dx} + \frac{\cos x}{\sin x}\cdot y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin x}\,y \quad \Big| \cdot \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|\sin x| + C$$

$$\ln|y| + \ln|\sin x| = C$$

$$\ln|y \cdot \sin x| = C$$

$$|y \cdot \sin x| = \underbrace{e^{C}}_{C_1 > 0}$$

$$y \cdot \sin x = \underbrace{\pm C_1}_{C_2 \neq 0}$$

$$y = \frac{C_2}{\sin x}, \quad \underbrace{y = \frac{C}{\sin x}}_{CORJ}$$

(2) W CORJ uzmienniamy stałą C: $C = C(x)$

$$y = \frac{C(x)}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{C'(x)\sin x - C(x)\cos x}{\sin^2 x} = \frac{C'(x)}{\sin x} - \frac{C(x) \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

RN: $\quad y' + \frac{\cos x}{\sin x} \cdot y = 2\cos x$

$$\underbrace{\frac{C'(x)}{\sin x} - \frac{C(x) \cdot \cos x}{\sin^2 x}}_{y'} + \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \underbrace{\frac{C(x)}{\sin x}}_{y} = 2\cos x$$

$$\frac{C'(x)}{\sin x} - \cancel{\frac{C(x) \cdot \cos x}{\sin^2 x}} + \cancel{\frac{C(x) \cdot \cos x}{\sin^2 x}} = 2\cos x$$

$$\frac{C'(x)}{\sin x} = 2\cos x \Rightarrow C'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

$$C'(x) = \sin 2x \Rightarrow C(x) = \int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$$

$$C(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$$

Wracając do CORJ: $\quad \underbrace{y = \frac{-\frac{1}{2}\cos 2x + C}{\sin x}}_{CORN}$

3.Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne – metoda przewidywań

Twierdzenie 3.1

Jeżeli funkcja $y_1(x)$ jest pewną całką szczególną równania różniczkowego liniowego niejednorodnego **(CSRN)**

$$y' + p(x)y = 0,$$

a funkcja $y_2(x)$ jest całką ogólną równania różniczkowego liniowego jednorodnego **(CORJ),** to funkcja

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x),$$

Jest całką ogólną równania różniczkowego liniowego niejednorodnego **(CORN).**

$$\text{CORN} = \underbrace{\text{CSRN}}_{\text{zgadujemy}} + \text{CORJ} \leftarrow \text{wyznaczymy zawsze rozwiązując RJ}$$

Na powyższym twierdzeniu opiera się metoda szukania całki ogólnej równania niejednorodnego metodą przewidywań. Najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne i otrzymujemy CORJ, następnie próbujemy zgadnąć całkę szczególną równania niejednorodnego. Ich suma jest szukaną całką ogólną równania niejednorodnego CORN.

Omówimy pewne typy równań liniowych, w których stosunkowo łatwo przewidzieć całkę CSRN.

3.1 Równania typu $y' + ay = \underbrace{be^{cx}}_{q(x)}$, gdzie a, b, c są stałe

$$\boxed{y' + \overset{\text{stała}}{\underset{p(x)}{a}} \cdot y}$$

Przewidujemy w tym przypadku następująco:

$$y = ke^{cx}, \qquad k = ?$$

gdzie k jest stałą.

a) na przykład w równaniu

$$y' - 2y = 3e^{3x},$$

przewidujemy CSRN:

$$y = ke^{3x}, \quad k = ?$$

Obliczamy pochodną

$$y' = 3ke^{3x}$$

i podstawiamy do równania wyjściowego:

$$\underbrace{3ke^{3x}}_{y'} - 2\underbrace{ke^{3x}}_{y} = 3e^{3x},$$

$ke^{3x} = 3e^{3x}$

$K = 3$

tak więc $k = 3$.

Szukana całka szczególna to $y = 3e^{3x}$. Udało się przewidzieć CSRN

Pozostaje obliczyć CORJ: $y' - 2y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2y$

$$\frac{dy}{y} = 2dx = \ln|y| = 2x + C$$

$$|y| = e^{2x+C}$$

$$|y| = e^{C} \cdot e^{2x}$$

$$y = C \cdot e^{2x}$$

Ostatecznie

CORN: $y = 3e^{3x} + Ce^{2x}$

b) na przykład w równaniu

$$y' - 4y = 2e^{4x},$$

przewidywanie jak wyżej prowadzi do sprzeczności.

Mianowicie przewidujemy CSRN:

$$y = ke^{4x} \quad , k = ?$$

$$y' = 4ke^{4x}$$

Wstawiając do równania b) mamy:

$4ke^{4x} - 4ke^{4x} = 2e^{4x}$. W takich przypadkach przewidujemy y w bardziej skomplikowanej postaci

$0 = 2e^{4x} \leftarrow$ sprzeczność

$$y = (kx + m)e^{cx}.$$

RN:

u nas $y=(kx+m)e^{4x} \Rightarrow y' = ke^{4x} + (kx+m)\cdot e^{4x}\cdot 4$

$$\underbrace{ke^{4x} + \cancel{4(kx+m)e^{4x}}}_{y'} - \underbrace{\cancel{4\cdot(kx+m)e^{4x}}}_{y} = 2e^{4x}$$

$$ke^{4x} = 2e^{4x}$$

$k=2$ a ile jest równe m?

Oznacza to, że m jest dowolną stałą rzeczywistą,

niech $m = C$, $C \in \mathbb{R}$

Np. $m=0$

$y=(2x+C)e^{4x}$ lub $y = 2xe^{4x}$ CSRN

Pozostaje wyznaczyć CORJ:

$$y' - 4y = 0$$

$$y = Ce^{4x}$$

Odp:

CORN: $y = Ce^{4x} + 2xe^{4x}$

Uwaga! !

Całka równania jednorodnego

$$y' - Ay = 0$$

jest postaci: $y = C\cdot e^{Ax}$

$$\frac{dy}{dx} = Ay$$

$$\frac{dy}{y} = A\,dx$$

$$\ln|y| = Ax + C$$

$$|y| = e^{Ax+C} \Rightarrow |y| = e^{C}\cdot e^{Ax}$$