Twierdzenie 1: o całkowaniu przez części

TEZA:

Niech funkcje f i g mają pochodne w przedziale I. Jeżeli iloczyn fg' ma w przedziale I funkcję pierwotną (odn. zewn.), to iloczyn $f'g$ ma w przedziale I funkcję pierwotną. Ponadto

Wzór: $$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

$x>0$

$$\int x\ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} f'(x)=x & \wedge \quad g(x)=\ln x \\ \Downarrow & \\ f(x)=\frac{1}{2}x^2 & \quad g'(x)=\frac{1}{x} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x - \int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C, \quad C\in\mathbb{R}$$

$$\int x^2e^x\,dx = \left| \begin{array}{ll} f'(x)=e^x & \wedge \quad g(x)=x^2 \\ \Downarrow & \qquad \Downarrow \\ f(x)=e^x & \quad g'(x)=2x \end{array} \right| =$$

$$= x^2e^x - \int e^x\cdot 2x\,dx = x^2e^x - 2\underbrace{\overbrace{\int x\cdot e^x\,dx}^{I}}_{\text{przez części}}$$

$$I = \int xe^x\,dx = \left| \begin{array}{ll} f'(x)=e^x & \wedge \quad g(x)=x \\ f(x)=e^x & \quad g'(x)=1 \end{array} \right| = xe^x - \int e^x\,dx =$$

$$= xe^x - e^x + C$$

$$\int (2x+1)\sin x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} f'(x) = \sin x & g(x) = 2x+1 \\ f(x) = -\cos x & g'(x) = 2 \end{array} \right\} =$$

$$= -(2x+1)\cos x + 2\int \cos x\,dx = -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$$

$$\int 1\cdot \operatorname{arctg} x\,dx = \left| \begin{array}{ll} f'(x) = 1 & g(x) = \operatorname{arctg} x \\ f(x) = x & g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Wzory: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

Twierdzenie

(o całkowaniu przez podstawienie)

Jeżeli:

1. Funkcja f: A ↦ ℝ jest ciągła na przedziale A,

2. Funkcja φ: B → A ma ciągłą pochodną na przedziale B,

to

$$\int f(x)\,dx = \int f\left(\varphi(t)\right) \varphi'(t)\,dt = F\left(\varphi(t)\right) + C,$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f.

Przykłady

1) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{1+x^6}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x^3 \Rightarrow x^6 = t^2 \\ 1\cdot dt = 3x^2\,dx \\ dt = 3x^2\,dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C =$

$= \underline{\underline{\operatorname{arctg}(x^3) + C}}$

Sprawdzenie: $\left(\operatorname{arctg}(x^3) + C\right)' =$

$= \dfrac{1}{1+(x^3)^2} \cdot (x^3)' = \dfrac{1}{1+x^6} \cdot 3x^2 = \dfrac{3x^2}{1+x^6}$

funkcja podcałkowa

2) $\int \sin x \underbrace{\cos x\, dx} = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \underbrace{\cos x\, dx} = dt \end{array} \right| = \int t\, dt = \frac{1}{2} t^2 + C =$

$= \frac{1}{2} (\sin x)^2 + C = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$

Oczywiście $\left(\frac{1}{2} \sin^2 x + C \right)' = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = \sin x \cos x$

3) $\int \underset{3(x+2)}{(3x+6)} \left(x^2+4x-10\right)^{1976} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2+4x-10 \\ 1 \cdot dt = (2x+4)\,dx \\ dt = 2(x+2)\,dx \;|:2 \\ \frac{dt}{2} = (x+2)\,dx \end{array} \right| =$

$= 3 \int (x+2)(x^2+4x-10)^{1976} dx = 3 \int t^{1976} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{3}{2} \int t^{1976} dt =$

$= \frac{3}{2} \cdot \frac{t^{1977}}{1977} + C = \frac{3}{3954} t^{1977} + C = \frac{1}{1318} (x^2+4x-10)^{1977} + C$

4) $\int \frac{x}{\sqrt{1-9x^4}} dx = \left| \begin{array}{l} 9x^4 = t^2 \;|\sqrt{\ } \\ 3x^2 = t \\ 6x\,dx = dt \;|:6 \\ x\,dx = \frac{1}{6} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{6} dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{6} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$

xdx

$= \frac{1}{6} \arcsin t + C = \frac{1}{6} \arcsin (3x^2) + C$

5) $\int x \sqrt{x+2}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+2} = t \;|()^2 \\ x+2 = t^2 \\ 1 \cdot dx = 2t\,dt \\ dx = 2t\,dt \\ \to x = t^2 - 2 \end{array} \right\} = \int (t^2-2)\, t\, 2t\, dt =$

$x \geqslant -2$

$= 2\int (t^4 - 2t^2)\, dt =$

$= 2\int t^4 dt - 4 \int t^2 dt = 2 \cdot \frac{t^5}{5} - 4 \cdot \frac{t^3}{3} + C =$

$= \frac{2}{5} \left(\sqrt{x+2}\right)^5 - \frac{4}{3} \left(\sqrt{x+2}\right)^3 + C$

II sposób

$$\int x\sqrt{x+2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x+2=t \\ dx=dt \\ \to x=t-2 \end{array} \right| = \int (t-2)\sqrt{t}\,dt = \int \left(t\sqrt{t}-2\sqrt{t}\right)dt =$$

$$= \int \left(t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}\right)dt = \int t^{\frac{3}{2}}\,dt - 2\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + C$$

Całka z funkcji wymiernej

Jeżeli $P(x), Q(x)$ są to dowolne wielomiany ($Q(x) \neq 0$), to całkę

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

nazywamy całką z funkcji wymiernej.

Schemat obliczania

1. Funkcję wymierną zapisujemy w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.
2. Mianownik funkcji wymiernej właściwej zapisujemy w postaci iloczynowej (rozkładamy na czynniki liniowe i kwadratowe). stopień licznika < stopień mianownika
3. Dokonujemy rozkładu funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste pierwszego i drugiego rodzaju.
4. Obliczamy całki poszczególnych składników rozkładu.

Całkowanie ułamków prostych I – go rodzaju

1. $\int \frac{K}{x+k}dx = K\int \underbrace{\frac{1}{x+k}dx} = K\ln|x+k| + C, \qquad K, k, C \in \mathbb{R}.$

Uwaga

Całki postaci $\int \frac{1}{x+k}dx$, gdzie $k \in \mathbb{R}$, nazywamy logarytmicznymi.

Np. $\int \frac{5}{x-2}dx = 5\cdot\int \frac{1}{x-2}dx = 5\cdot\ln|x-2| + C$

2. $\int \frac{K}{(x+k)^n}dx = -\frac{K}{(n-1)(x+k)^{n-1}} + C, \qquad$ dla ≥ 2.

Np. $\int \frac{8}{(x+3)^2}dx = -\frac{8}{(x+3)^1} + C = -\frac{8}{x+3} + C$

Przykłady

1) $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+3)(2-x)}$

Rozkładamy na ułamki prostych

$$\frac{x}{(x-1)(x+3)(2-x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{2-x} \quad \Big/\cdot(x-1)(x+3)(2-x)$$

$$x \equiv A(x+3)(2-x) + B(x-1)(2-x) + C(x-1)(x+3)$$

dla $x=1$: $1 = A\cdot 4 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

dla $x=2$: $2 = 5C \Rightarrow C = \frac{2}{5}$

dla $x=-3$: $-3 = B\cdot(-4)\cdot 5 \Rightarrow B = \frac{3}{20}$

Więc $\int \frac{x}{(x-1)(x+3)(2-x)}dx = \int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{3}{20}}{x+3} + \frac{\frac{2}{5}}{2-x}\right)dx =$

$= \frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}dx + \frac{3}{20}\int\frac{1}{x+3}dx + \frac{2}{5}\int\frac{1}{2-x}dx =$

$= \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{3}{20}\ln|x+3| + \frac{2}{5}I$

$I = \int\frac{1}{2-x}dx = -\int\frac{1}{x-2}dx =$

$= -\ln|x-2| + C$

2) $\int \frac{2x+4}{x^3-2x^2}dx = (*)$

$$\frac{2x+4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} \quad / \cdot x^2(x-2)$$

$$2x+4 = Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2$$
$$2x+4 = Ax^2 - 2Ax + Bx - 2B + Cx^2$$
$$2x+4 = x^2(A+C) + x(B-2A) - 2B$$

ω: $-2B = 4 \Rightarrow B = -2$

x: $2 = B - 2A \Rightarrow 2+2 = -2A \Rightarrow A = -2$

x^2: $0 = A + C \Rightarrow C = 2$

$$(*) = \int\left(\frac{-2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x-2}\right)dx = -2\int\frac{1}{x}dx - 2\int\frac{1}{x^2}dx + 2\int\frac{1}{x-2}dx =$$
$$= -2\ln|x| - 2\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) + 2\ln|x-2| + C =$$
$$= -2\ln|x| + \frac{2}{x} + 2\ln|x-2| + C$$

Całkowanie ułamków prostych II – go rodzaju

$$\int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}dx$$

Wykonujemy najpierw podstawienie $t = x^2 + px + q$, następnie zapisujemy trójmian $x^2 + px + q$ w postaci kanonicznej i stosujemy kolejne podstawienie za $x + \frac{p}{2}$.

$$3)\int \frac{x\,dx}{x^2-x+1} = \int \frac{x}{\underbrace{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}_{x^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{4}}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x-\frac{1}{2}=t \\ dx=dt \\ x=t+\frac{1}{2} \end{array} \right| =$$

$$\Delta = 1-4<0$$

$$= \int \frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \underbrace{\int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt}_{I_2} =$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)+C = \frac{1}{2}\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]+C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C$$

$$I_2 = \int \frac{\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \left| \begin{array}{l} t^2=\frac{3}{4}u^2 \;/\sqrt{\ } \\ t=\frac{\sqrt{3}}{2}u \\ dt=\frac{\sqrt{3}}{2}\,du \end{array} \right| = \quad u=\frac{2}{\sqrt{3}}t$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{4}u^2+\frac{3}{4}}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{4}(u^2+1)}\,du =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}}{3}\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,u + C_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt{3}}{3}t + C_1 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right) + C_1$$

lub

$$\int \frac{\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt{3}}{3}t + C$$

$$a=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Wzory: $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+C$

$$4)\ \int \frac{x^2+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx + \int \frac{-2x-2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = (*)$$

$$\Delta = 4-12<0$$

$$\frac{x^2+1}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{\overset{=0}{A}x+\overset{=1}{B}}{x^2+2x+3} + \frac{\overset{=-2}{C}x+\overset{=-2}{D}}{(x^2+2x+3)^2} \quad \Big| \cdot (x^2+2x+3)^2$$

$$x^2+1 = (Ax+B)(x^2+2x+3) + Cx + D$$

$$x^2+1 = Ax^3+2Ax^2+3Ax+Bx^2+2Bx+3B+Cx+D$$

$$x^2+1 = Ax^3 + x^2(2A+B) + x(3A+2B+C) + 3B+D$$

$$x^3:\quad 0 = A$$

$$x^2:\quad 1 = 2A+B \Rightarrow B=1$$

$$x:\quad 0 = 2+C \Rightarrow C=-2$$

$$w:\quad 1 = 3B+D \Rightarrow D = 1-3=-2$$

$$(*) = \underbrace{\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx = \left|\begin{matrix} x+2=t \\ dx=dt \end{matrix}\right| = \int \frac{1}{t^2+2}\,dt =$$

$$\Downarrow a=\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{2}} + C$$

$$I_2 = \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = -\frac{1}{x^2+2x+3} + C_1$$

Wzór $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}\,dx = -\frac{1}{f(x)} + C$

lub $\int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} = \left|\begin{matrix} t = x^2+2x+3 \\ dt = (2x+2)\,dx \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C =$

$$= -\frac{1}{x^2+2x+3} + C$$

5) $\int \frac{x^3+2}{x^3-x}dx$, uwaga! funkcja wymierna podcałkowa nie jest właściwa.

Wykonujemy dzielenie:

$$\frac{x^3+2}{x^3-x} = \frac{(x^3-x)+(x+2)}{x^3-x} = 1 + \frac{x+2}{x^3-x}$$

$$\int \frac{x^3+2}{x^3-x}dx = \int\left(1+\frac{x+2}{x^3-x}\right)dx = \int dx + \underbrace{\int \frac{x+2}{x^3-x}dx}_{I} =$$

$$= x + I$$

$$I = \int \frac{x+2}{x(x^2-1)}dx = \int \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}dx = (*)$$

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$\vdots$

6) $\int \frac{3x+1}{x^3+2x^2+x}dx = \int \frac{3x+1}{x(x^2+2x+1)}dx = \int \frac{3x+1}{x(x+1)^2} = (*)$

$$\frac{3x+1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} \quad / \cdot x(x+1)^2$$

$$3x+1 = A(x+1)^2 + Bx + C(x+1)x$$

dla $x=0$: $1 = A$

dla $x=-1$: $-2=-B \Rightarrow B=2$

dla $x=1$: $4=4+2+2C \Rightarrow 2C=-2$

$C=-1$

$$(*) = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \int \frac{1}{x}dx + 2\int\frac{1}{(x+1)^2}dx - \int\frac{1}{x+1}dx =$$

$$= \ln|x| + 2\left(-\frac{1}{x+1}\right) - \ln|x+1| + C = \ln|x| - 2\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C$$

$$= \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \frac{1}{x+1} + C$$

$$\int \frac{2}{(x+1)^2}\,dx \quad \left| \begin{matrix} n=2 \\ K=2 \\ k=1 \end{matrix} \right| = -\frac{2}{(x+1)^{2-1}} = -\frac{2}{x+1} + C$$

Wzór z ćwiczeń

$$\int \frac{K}{(x+k)^n}\,dx = -\frac{K}{(n-1)(x+k)^{n-1}}$$

lub

$$\int \frac{2}{(x+1)^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x+1=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = 2\int \frac{1}{t^2}\,dt = 2\int t^{-2}\,dt =$$

$$= 2\,\frac{t^{-1}}{-1} + C = -2\cdot\frac{1}{t} + C =$$

$$= -\frac{2}{t} + C = \frac{-2}{x+1}\,dt$$

7) $$\int \frac{x^7 - 3x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 2x - 16}{x^4 - 3x^2 - 4}\,dx = (*)$$

$$(x^7 - 3x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 2x - 16) : (x^4 - 3x^2 - 4) = x^3 + 3$$

$$\begin{array}{l} -x^7 + 3x^5 \qquad + 4x^3 \\ \hline = \quad = \quad 3x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 2x - 16 \\ \qquad -3x^4 \qquad + 9x^2 \quad + 12 \\ \hline \qquad = \quad 2x^3 + x^2 + 2x - 4 \end{array}$$

$$(*) = \int \left(x^3 + 3 + \frac{2x^3 + x^2 + 2x - 4}{x^4 - 3x^2 - 4} \right) dx = \int x^3\,dx + 3\int dx + I =$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + 3x + I$$

$$I = \int \frac{2x^3 + x^2 + 2x - 4}{x^4 - 3x^2 - 4}\,dx$$

postać iloczynowa

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = t, \quad t > 0$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$\Delta_t = 9 + 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta_t} = 5$$

$t_1 = \frac{3-5}{2} = -1$

$t_2 = 4$

$(t+1)(t-4) = 0$

$(x^2+1)(x^2-4) = 0$

$I = \int \frac{2x^3+x^2+2x-4}{(x^2+1)(x-2)(x+2)} dx$

$$\frac{2x^3+x^2+2x-4}{(x^2+1)(x-2)(x+2)} = \left(\frac{Ax+B}{x^2+1} + \boxed{\frac{C}{x-2}} + \boxed{\frac{D}{x+2}} \right) \cdot (x^2+1)(x^2-4)$$

$$2x^3+x^2+2x-4 = (Ax+B)(x^2-4) + C(x^2+1)(x+2) + D(x^2+1)(x-2)$$

dla $x=2$:

$2 \cdot 8 + 4 + \cancel{4} - \cancel{4} = C \cdot 5 \cdot 4$

$20 = 20C \Rightarrow \underline{\underline{C=1}}$

dla $x=-2$:

$-2 \cdot 8 + \cancel{4} - 4 - \cancel{4} = -20D$

$\underline{\underline{D=1}}$

dla $x=1 \Rightarrow A = \dots ?$

dla $x=0$:

$-4 = B\cdot(-4) + 2C - 2D$

$C \Downarrow 1$, $D \Downarrow 1$

$-4 = -4B$

$\underline{\underline{B=1}}$