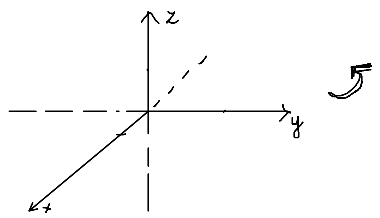
Ćwiczenia 5

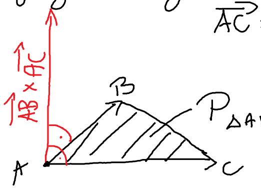


Zad. 1.

Dane są p-ty $A=(0,2,0)$ $B=(2,0,2)$, $C=(2,2,2)$. Obliczyć pole trójkąta $\triangle ABC$.

Wyznaczymy wektory $\vec{AB}=[2,-2,2]$

$\vec{AC}=[2,0,2]$



$$P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & 2\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|-4\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}-4\vec{j}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|-4\vec{i}+4\vec{k}\right|=\frac{1}{2}\left|-4\cdot[1,0,0]+4[0,0,1]\right|=\frac{1}{2}\left|[-4,0,0]+[0,0,4]\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|[-4,0,4]\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-4)^2+0^2+4^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot16}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=\underline{\underline{2\sqrt{2}\,[j^2]}}$$

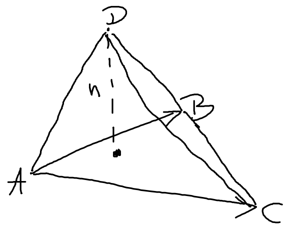
Zad. 2.

Obliczyć długość h wysokości czworościanu o wierzchołkach $A=(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,2,3)$ $D=(3,4,5)$ opuszczonej z wierzchołka D.

Wyznaczymy $\vec{AB}=[1,0,0]$

$\vec{AC}=[0,2,3]$

$\vec{AD}=[3,4,5]$



Objętość czworościanu ABCD: $V=\frac{1}{6}\left|(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})\right|$

Z drugiej strony $V=\frac{1}{3}P_{\triangle ABC}\cdot h$

$$(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&3\\3&4&5\end{vmatrix}=-2 \Rightarrow V=\frac{1}{6}\underline{|-2|}=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

iloczyn mieszany

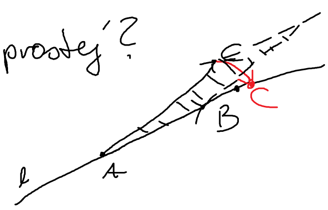
Z iloczynu wektorowego obliczamy $P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&0\\0&2&3\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|[0,-3,2]\right|=$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{9+4}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$h=\frac{2}{\sqrt{13}}=\underline{\underline{\frac{2\sqrt{13}}{13}}}$$

Zad. 3.

Czy punkty $A=(-2,5,0)$ $B=(1,1,1)$, $C=(4,-3,2)$ leżą na jednej prostej?

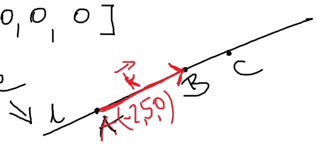


Sprawdzimy czy $\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=0$ (wtedy ABC są współliniowe)

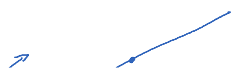
$\vec{AB}=[+3,-4,1]$ $\vec{AB}\parallel\vec{AC}$

$\vec{AC}=[6,-8,+2]$ $\vec{AB}\times\vec{AC}=[0,0,0]$

Tak, p-ty A, B, C są współliniowe

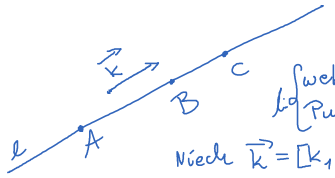


Zad. 4. ... zad. 3.



l $A(-2,5,0)$

Zad. 4.
Napisać równanie prostej z zad. 3.
Jako wektor kierunkowy $\vec{k}$ obierzemy wektor $\vec{AB}=[3,-4,1]$,



l: { wektor kierunkowy
Punkt

Niech $\vec{k}=[k_1,k_2,k_3]$
$P=(x_0,y_0,z_0)$

(1) R-nie parametryczne prostej: $l: \begin{cases} x=x_0+k_1 t, \\ y=y_0+k_2 t, \\ z=z_0+k_3 t, \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

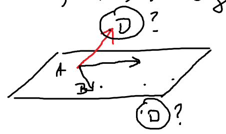
$l: \begin{cases} x=-2+3t, \\ y=5-4t, \\ z=t, \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

lub

(2) R-nie kierunkowe prostej l. $\dfrac{x-x_0}{k_1}=\dfrac{y-y_0}{k_2}=\dfrac{z-z_0}{k_3}$

$l: \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-5}{-4}=z$

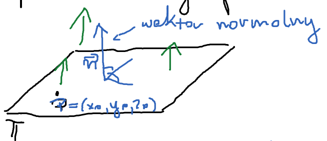
Zad. 5
Dane są p-ty $A=(0,-3,4)$, $B=(3,-3,1)$, $C=(4,5,2)$, $D=(2,11,0)$. Czy można przez nie poprowadzić płaszczyznę?



$\vec{AB}=[3,0,-3]$
$\vec{AC}=[4,8,-2]$
$\vec{AD}=[2,14,-4]$

$(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})=\begin{vmatrix}3&0&-3\\4&8&-2\\2&14&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&-3\\2&8&-2\\-2&14&-4\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}2&8\\-2&14\end{vmatrix}=-3(28+16)=3\cdot 44\neq 0 \Rightarrow$ p-ty A,B,C,D nie leżą na jednej płaszczyźnie.

Zad. 6.
Napisać r-nie płaszczyzny przechodzącej przez p-ty $B(3,-3,1)$, $C=(4,5,2)$, $D=(2,11,0)$



$\vec{n}=[n_1,n_2,n_3]$
$P(x_0,y_0,z_0)$

$\pi: \quad n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0$

$n_1x+n_2y+n_3z+n=0$

Np. $\pi: -2x+5y-z+1=0$, to $\vec{n}=[-2,5,-1]$

$\pi: -2x+5y-z=-1,$
$\pi_1: x-y+z=0,$
$\pi_2: 2x+4y-3z=3,$

$\vec{n}=\vec{BC}\times\vec{BD}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&8&1\\-1&14&-1\end{vmatrix}=\underbrace{[-22,0,22]}_{\vec{n}}$ czyli $\pi: -22(x-2)+0(y-11)+22(z-0)=0$

$P=D=(\underset{x_0}{2},\underset{y_0}{11},\underset{z_0}{0})$

$-22x+44+22z=0$

$-22x+22z+44=0 \quad |:22$

$-x+z+2=0$

Ale równie dobrze możemy przyjąć, że $\vec{n}=[-1,0,1]$:

$-(x-2)+0(y-11)+(z-0)=0$

$-x+z+2=0$

Zad. 7.
Dane jest równanie krawędziowe prostej l. Napisać r-nia parametryczne oraz kierunkowe tej prostej.

$l: \begin{cases} 3x+y-z+13=0 \\ y+2z-8=0 \end{cases}$

[illegible]

$$l: \begin{cases} 3x + y - z + 13 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

Rozwiążemy układ r-ń

$$\begin{cases} 3x + y - z = -13, \\ y + 2z = 8, \end{cases}$$

$$rA = rU = 2$$

Niech $x = t$, $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y - z = -13 - 3t \\ y + 2z = 8 \end{cases}$$

$$3z = 21 + 3t \quad / : 3$$

$$z = 7 + t$$

$$y = 8 - 14 - 2t$$

$$y = -6 - 2t$$

$$l: \begin{cases} x = t, \\ y = -6 - 2t, \\ z = 7 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Czyli $\vec{k}_l = [1, -2, 1]$ oraz $P(0, -6, 7)$

$$l: \frac{x-0}{1} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z-7}{1} \quad \left(x = \frac{y+6}{-2} = z - 7 \right)$$