Matematyka 2

Wykład nr 3

1. Całka oznaczona

Definicja 1.1 (podział odcinka)

Podziałem odcinka [a, b] na na n części, $n \in \mathbb{N}$, nazywamy zbiór

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$

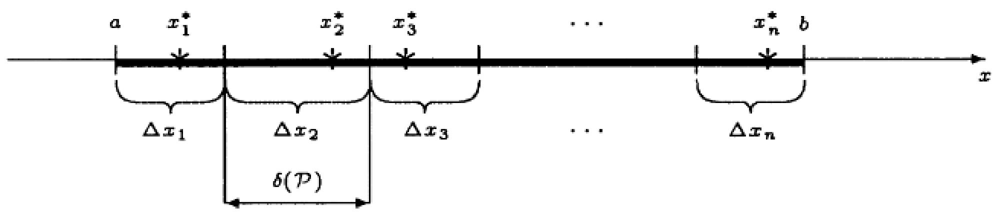
Przy czym $\quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$

W definicji całki będziemy stosować następujące oznaczenia:

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $1 \le k \le n$ – długość k – tego odcinka podziału P;

$\delta(P) = \max\{\Delta x_k : 1 \le k \le n\}$ – średnica podziału P;

x_k^* – punkt pośredni k – tego odcinka podziału P.

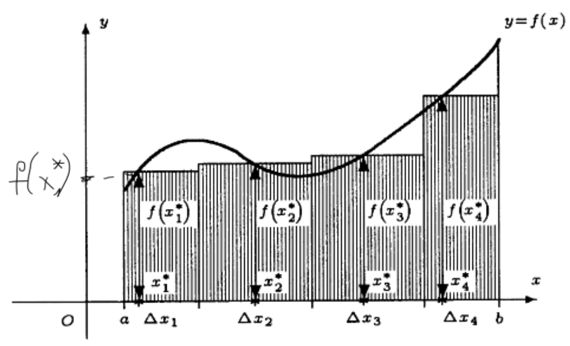


Definicja 1.2 (suma całkowa)

Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale [a, b] oraz niech P będzie podziałem tego przedziału. Sumą całkową odpowiadającą podziałowi P oraz punktom pośrednim tego podziału nazywamy liczbę

$$\sigma(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k.$$

Przykład



Suma całkowa jest przybliżeniem pola obszaru ograniczonego wykresem funkcji f, prostymi x = a, x = b praz osią Ox.

Definicja 1.3 (całka Riemanna)

Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale [a, b]. Całkę oznaczoną Riemanna definiujemy następująco:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k.$$

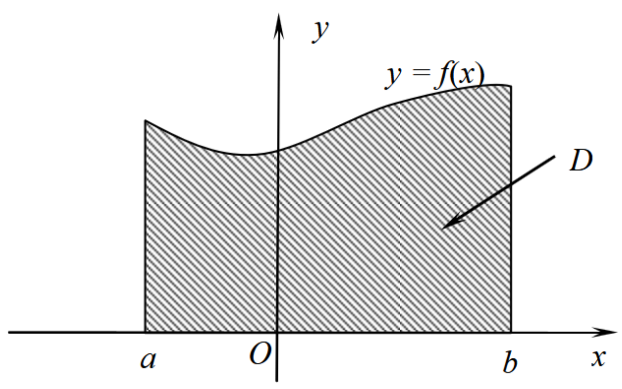
Zakładamy, że granica w powyższym wzorze jest właściwa i nie zależy od sposobu podziału P i wyboru punktów pośrednich.

Przyjmujemy ponadto, że

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

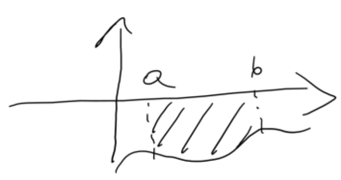
2. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

Pole trapezu krzywoliniowego



Jeżeli funkcja f jest ciągła i ma wartości dodatnie, wtedy pole obszaru D jest liczbowo równe całce $\int_a^b f(x)\,dx$.

Jeżeli funkcja f jest ciągła i ma wartości ujemne (wykres leży poniżej osi Ox), wtedy pole obszaru D jest równe wartości bezwzględnej całki oznaczonej $\int_a^b f(x)\,dx$. (Wynik całkowania jest wtedy ujemny).



$\int_a^b f(x)dx < 0$

$P = |\int_a^b f(x)dx|$

Twierdzenie 2.1 (warunek wystarczający całkowalności funkcji)

Jeżeli funkcja f jest ograniczona na przedziale [a, b] i ma na tym przedziale co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości I – go rodzaju, to jest na nim całkowalna.

Twierdzenie 2.2 (Newtona - Leibniza)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale [a, b], to

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f.

Zamiast różnicy F(b) – F(a), będziemy pisali $[F(x)]_a^b$ lub $F(x)|_a^b$.

Przykłady

$$\int_{-1}^{2} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_{-1}^{2} = -e^{-2} - \left(-e^{1}\right) = -\frac{1}{e^2} + e = e - \frac{1}{e^2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Twierdzenie 2.3 (o liniowości całki oznaczonej)

Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na [a, b], to:

1. $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$;
2. $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$;
3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$.

3. Schemat obliczania całek oznaczonych

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

1. Wyznaczamy dziedzinę funkcji f.

2. Sprawdzamy czy przedział całkowania [a, b] zawiera się w D_f.

3. Obliczamy całkę nieoznaczoną $\int f(x)\,dx$. $\Rightarrow F(x)$

4. Stosujemy twierdzenie Newtona – Leibniza.

Zadania

1. Obliczyć całki:

a) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right) dx$;

$f(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\int\left(x^{-3}-2x^{-2}+x^{-4}\right)dx=-\frac{1}{2}x^{-2}-2\cdot\frac{-1}{x}+\frac{x^{-3}}{-3}+C=$$

$$=-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$$

$$\int_1^2\left(\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx=\left[-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}\right]_1^2\overset{N-L}{=}\left(-\frac{1}{8}+1-\frac{1}{24}\right)-\left(-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}=-1+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$$

b) $\int_1^e x\ln x\,dx$;

$f(x)=x\ln x$, $D_f=(0,\infty)$

$$\int x\ln x\,dx=\left|\begin{array}{ll} f(x)=\ln x & g'(x)=x \\ f'(x)=\frac{1}{x} & g(x)=\frac{1}{2}x^2\end{array}\right|=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$$

$$\int_1^e x\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right]_1^e=\left(\frac{1}{2}e^2\underbrace{\ln e}_{1}-\frac{1}{4}e^2\right)-\left(\frac{1}{2}\underbrace{\ln 1}_{0}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

c) $\int_{-2}^2 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$ $\quad f(x)=\frac{x^3}{1+x^2}$, $D_f=\mathbb{R}$

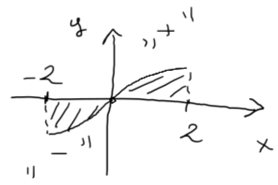
$$\int\frac{x^3}{1+x^2}dx=\int\frac{x(1+x^2)-x}{1+x^2}dx=\int x\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}x^2-\ln(1+x^2)+C$$

$$\int_{-2}^2\frac{x^3}{1+x^2}dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\ln(1+x^2)\right]_{-2}^2=\left(\frac{1}{2}2^2-\ln(1+2^2)\right)-\left(\frac{1}{2}(-2)^2-\ln(1+(-2)^2)\right)=$$

$$=(2-\ln 5)-(2-\ln 5)=0$$

Uwaga! $f(-x)=\frac{(-x)^3}{1+(-x)^2}=\frac{-x^3}{1+x^2}=-\frac{x^3}{1+x^2}=-f(x)$

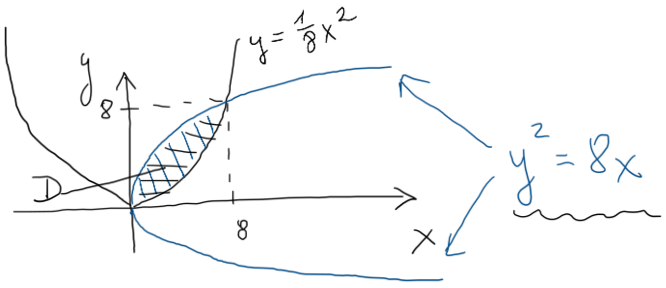
$f(-x)=-f(x) \Rightarrow$ warunek nieparzystości f-ji



2. Obliczyć pole obszaru płaskiego ograniczonego parabolami $y^2 = 8x$, $x^2 = 8y$. $\Rightarrow y=\frac{1}{8}x^2$

3. Obliczyć pole obszaru płaskiego ograniczonego parabolą $y^2 = 2x$ oraz okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

Zad. 2.



$y=\sqrt{8x}$

$y=-\sqrt{8x}$

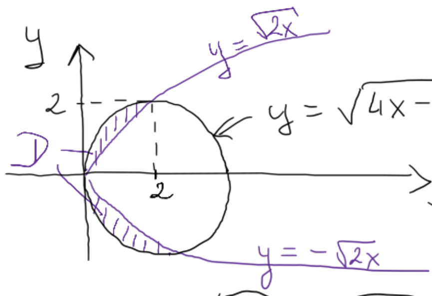
$$D=\int_0^8\sqrt{8x}\,dx-\int_0^8\frac{1}{8}x^2\,dx=\int_0^8\left(\sqrt{8x}-\frac{1}{8}x^2\right)dx=\left[\sqrt{8}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{24}x^3\right]_0^8=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{8}\cdot\sqrt{8^3}-\frac{1}{24}\cdot 512-0=\frac{2}{3}\cdot 64-\frac{64}{3}=\frac{64}{3}[j^2]$$

Zad. 3.

$y^2=2x$ i $x^2+y^2-4x=0$

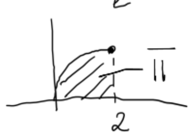
$(x-2)^2+y^2=4 \Rightarrow O(S(2,0), r=2)$



$$D=2\int_0^2\left(\sqrt{4x-x^2}-\sqrt{2x}\right)dx=2\left[\int_0^2\sqrt{4x-x^2}\,dx-\sqrt{2}\int_0^2\sqrt{x}\,dx\right]$$

$$\int_0^2\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^2=\frac{2}{3}\sqrt{8}$$

$\int\frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ $\int\frac{4x-x^2}{\sqrt{4x-x^2}}dx \rightarrow$ metoda współczynników nieoznaczonych



$$D=2\left(\pi-\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{8}\right)=2\left(\pi-\frac{8}{3}\right)[j^2]$$

$$\int\frac{4x-x^2}{\sqrt{4x-x^2}}dx=\overbrace{(Ax+B)}^{Q_{n-1}(x)}\sqrt{4x-x^2}-\int\frac{K}{\sqrt{4x-x^2}}dx \quad /()'$$ metoda współczynników nieoznaczonych

$$\frac{4x-x^2}{\sqrt{4x-x^2}}=A\sqrt{4x-x^2}+(Ax+B)\cdot\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}-\frac{K}{\sqrt{4x-x^2}} \quad \Big|\cdot\sqrt{4x-x^2}$$

$$4x-x^2=A(4x-x^2)+(Ax+B)(2-x)-K$$

$$4x-x^2=4Ax-Ax^2+2Ax+2B-Ax^2-Bx-K$$

$x^2:\ -1=-2A \Rightarrow A=\frac{1}{2}$

$x:\ 4=6A-B \Rightarrow B=-1$

$w:\ 0=2B-K \Rightarrow K=-2$

$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C$ wzór

$$\int\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx=\left\{\begin{matrix}x-2=2t\\ dx=2dt\end{matrix}\right\}$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{4-4t^2}}\cdot 2dt=\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\arcsin t+C$$

$$=\arcsin\frac{x-2}{2}+C$$

$$\int_0^2 \frac{4x-x^2}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx = \left[\left(\frac{1}{2}x-1\right)\sqrt{4x-x^2} + 2\arcsin\frac{x-2}{2}\right]_0^2 = (0+\overbrace{2\arcsin 0}^{0}) - (0+ \quad -(-\pi)=\pi \quad + \underbrace{2\arcsin(-1)}_{-\frac{\pi}{2}})$$

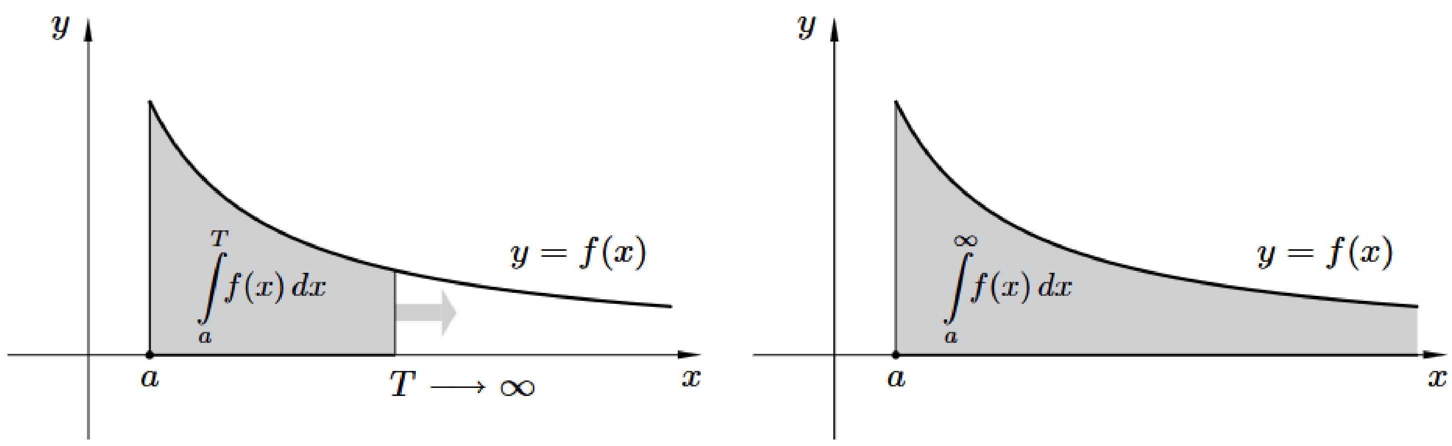
4. Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju

Definicja 4.1

Niech funkcja f będzie określona na przedziale $[a, \infty]$ oraz całkowalna w dowolnym przedziale domkniętym tego przedziału. Całkę funkcji f na przedziale $[a, \infty]$ określamy wzorem:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_a^T f(x)\,dx.$$

Jeśli granica po prawej stronie jest właściwa, mówimy że całka jest zbieżna. Jeżeli granica jest równa ∞ lub $-\infty$, to mówimy, że całka jest rozbieżna odpowiednio do ∞ lub $-\infty$. Jeśli granica nie istnieje, mówimy że całka jest rozbieżna.

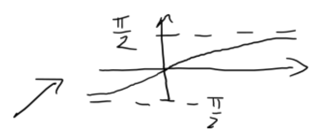


Analogicznie definiuje się całkę na przedziale $[-\infty, a]$.

Przykłady

$$\int_2^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_2^T e^{-x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_2^T = \lim_{T\to\infty}\left(-e^{-T}+e^{-2}\right) =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left(-\overset{\to 0}{\frac{1}{e^T}} + \frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2}$$



$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_1^T \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{T\to\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_1^T = \lim_{T\to\infty}\left(\underbrace{\operatorname{arctg} T}_{\frac{\pi}{2}} - \operatorname{arctg} 1\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{-9} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx = \lim_{S\to-\infty}\int_S^{-9} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx = \lim_{S\to-\infty} \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}\Big|_S^{-9} =$$

$$= \lim_{S\to-\infty} \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{64} - \overset{\to\infty}{\sqrt[3]{(S+1)^2}}\right) = -\infty \Rightarrow$$

całka rozbieżna do $-\infty$

Definicja 4.2

Niech funkcja f będzie określona na przedziale $[-\infty, \infty]$ oraz całkowalna w dowolnym przedziale domkniętym tego przedziału. Całkę funkcji f na przedziale $[-\infty, \infty]$ określamy wzorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx,$$

Gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą.

wzór

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C}$$

Przykłady

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{9+x^2}dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{9+x^2}dx}_{J_1} + \int_{0}^{+\infty}\frac{1}{9+x^2}dx = \frac{\pi}{3}$$

$$J_1 = \lim_{S\to-\infty}\int_S^0 \frac{1}{9-x^2}dx = \lim_{S\to-\infty}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Big|_S^0 = \lim_{S\to-\infty}\Big(\underbrace{\frac{1}{3}\operatorname{arctg}0}_{0} - \underbrace{\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\overbrace{\frac{S}{3}}^{-\infty}}_{-\frac{\pi}{2}}\Big)$$

$$J_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$J_2 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{1}{9+x^2}dx = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Big|_0^T = \lim_{T\to\infty}\Big(\underbrace{\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\overbrace{\frac{T}{3}}^{\infty}}_{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\frac{1}{3}\operatorname{arctg}0}_{0}\Big)$$

$$J_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{-2x}dx}_{J_1} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-2x}dx}_{J_2}$$

$$e^{\infty} \to \infty$$

$$J_1 = \lim_{S\to-\infty} -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_S^0 = \lim_{S\to-\infty}\Big(-\frac{1}{2}\underbrace{e^0}_{1} + \frac{1}{2}e^{-2S}\Big) = \infty$$

$$J_2 = \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^T = \lim_{T\to\infty}\Big(-\frac{1}{2}e^{-2T} + \frac{1}{2}\underbrace{e^0}_{1}\Big) = \frac{1}{2}$$

$$e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} \to 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x}dx = \infty + \frac{1}{2} = \infty$$ całka rozbiezna do ∞.

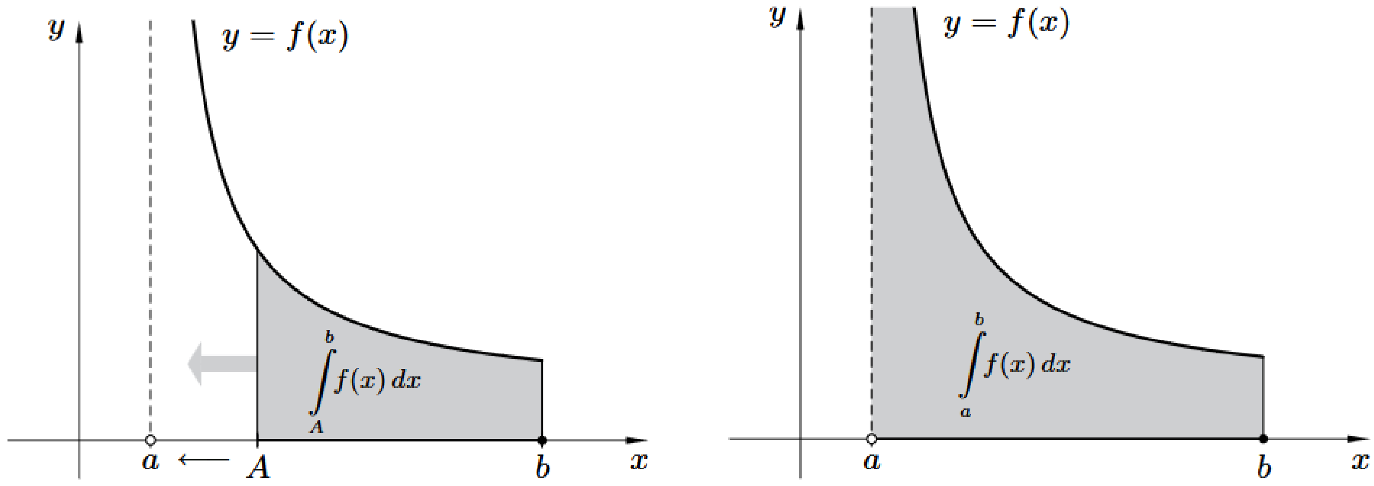
5. Całki niewłaściwe drugiego rodzaju

Definicja 5.1

Niech funkcja f będzie określona na przedziale $(a, b]$ będzie nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a. Całkę funkcji f na przedziale $(a, b]$ określamy wzorem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{A\to a^+} \int_A^b f(x)\,dx.$$

Jeśli granica po prawej stronie jest właściwa, mówimy że całka jest zbieżna. Jeżeli granica jest równa ∞ lub $-\infty$, to mówimy, że całka jest rozbieżna odpowiednio do ∞ lub $-\infty$. Jeśli granica nie istnieje, mówimy że całka jest rozbieżna.



Analogicznie definiuje się całkę funkcji określonej na przedziale $[a, b)$, nieograniczonej tylko w lewostronnym sąsiedztwie punktu b:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{B\to b^-} \int_a^B f(x)\,dx.$$

Przykład

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-1}dx = \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-1}dx}_{y_1} + \underbrace{\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2-1}dx}_{y_2} = -\infty$$ → całka rozbieżna do $-\infty$

wzór

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|} + C$$

$$y_1 = \lim_{A\to -1^+} \int_A^0 \frac{1}{x^2-1}dx = \lim_{A\to -1^+}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_A^0 = \lim_{A\to -1^+}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}\ln 1}_{0} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{A-1}{A+1}\right|\Big) = -\infty$$

$\left|\frac{-2}{0^-}\right|$ $|\infty|$

$$y_2 = \lim_{B\to 1^-} \int_0^B \frac{1}{x^2-1}dx = \lim_{B\to 1^-}\Big(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{B-1}{B+1}\right| - \underbrace{\frac{1}{2}\ln 1}_{0}\Big) = -\infty$$

0^+ $-\infty$