Ćw. 4

22.03.

Zadanie

Rozwiązać układ równań liniowych

(1) $\begin{cases} 3x+y = -2 \\ x-2z = -3 \\ 2x+2z = 2 \end{cases}$ kolumna wyrazów wolnych

(1) liczba niewiadomych = liczbie równań oraz (2) $\det A \neq 0$ } układ Cramera

Tworzę macierz główną $A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} \\ \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \end{array}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4-2 = -6 \neq 0$$

Układ r-ń (1) jest cramerowski i stosujemy wzory Cramera:

$$\begin{cases} x = \frac{\quad}{\det A}, & \text{gdzie } A_x = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \det A = 2 \\ y = \frac{\det A_y}{\det A}, & \text{gdzie } A_y = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} & \det A_y = 6 \\ z = \frac{\det A_z}{\det A}, & \text{gdzie } A_z = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \det A_z = -8 \end{cases}$$

Rozwiązaniem jest ~~trójka~~

$$\begin{cases} x = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{6}{-6} = -1 \\ z = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

} Dokładnie jedno rozwiązanie, punkt $\left(-\frac{1}{3}, -1, \frac{4}{3}\right)$

Układ (1) jest oznaczony

Uwaga! Każdy układ Cramera jest oznaczony

(2) $\begin{cases} x+2y-z = 1 \\ 2x+4y-2z = 1 \\ x+3y-z = 3 \end{cases}$ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ nie jest to układ Cramera

Twierdzenie

Układ r-ń liniowych ma rozwiązanie $\Leftrightarrow$ $r A = r U$

macierz główna, macierz uzupełniona

Czy $r A = 2$? Owszem, bo $M = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4+6 = 2 \neq 0$

Tak

Ponieważ minor jest niezerowy i stopnia (2), to $r A = 2$

Sprawdzamy, czy $r U = r \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3$

$k_3 = -k_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2) \neq 0$$

$r A \neq r U \Rightarrow$ brak rozwiązań (układ r-ń sprzeczny)

(3) $\begin{cases} x+2y+z = 4 \\ -x+y+z = 4 \end{cases}$ $r A = 2$ $\det A_x = -2$

$rz\,A \neq rz\,U \Rightarrow$ brak rozwiązań (układ r-ń sprzeczny)

(3)
$$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ -x+y+z=4 \\ x+y+z=2 \end{cases} \qquad rz\,A = 2 \qquad \begin{aligned} \det A_x &= -2 \\ \det A_y &= 4 \\ \det A_z &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

(4)
$$\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 3x+y+z=5 \\ x+2y+2z=5 \end{cases} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{nie jest to układ Cramera}$$

$M_2 \neq 0$ $\qquad \Rightarrow rz\,A \neq 3$ czyli $rz\,A \leq 2$

$rz\,A = 2 \quad rz\,U = ?$

$$rz\,U = rz\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = 2.$$

$k_3 = k_2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rz\,U < 3$$

$rz\,A = rz\,U = 2 \Rightarrow$ 1° wybieramy z A minor niezerowy stopnia 2

$M = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

2° zaznaczam wybrany minor w układzie r-ń

3° odrzucamy r-nia, których zaznaczony minor nie obejmuje, oraz niewiadome, których minor nie obejmuje stają się parametrami rzeczywistymi

$$\begin{cases} 3x+y = 5-\alpha \\ x+2y = 5-2\alpha \end{cases}, \qquad z=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

otrzymaliśmy układ Cramera, gdzie $\det A_c = 5$ czyli
$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5-\alpha & 1 \\ 5-2\alpha & 2 \end{vmatrix}}{5} \\[2ex] y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 5-\alpha \\ 1 & 5-2\alpha \end{vmatrix}}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}(10-2\alpha-5+2\alpha) = 1 \\ y = \frac{1}{5}(15-6\alpha-5+\alpha) = 2-\alpha \end{cases}$$

Układ (4) ma nieskończenie wiele rozwiązań w zależności od parametru $\alpha\in\mathbb{R}$, postaci:
$$\begin{cases} x=1 \\ y=2-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

(5) →

(6)
$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5 \end{cases}$$

$$rz\,U = rz\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix} = rz\,A = rz\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 2$$

$k_5 = k_4 \qquad k_3 = k_1 \qquad k_2 = -2k_1$

$rz\,U = rz\,A = 2$

$$\begin{cases} x_3-x_4 = -1-\alpha+2\beta \\ x_3+5x_4 = 5-\alpha+2\beta \end{cases}, \qquad \alpha = x_1,\ \beta = x_2,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

$$r\,U = r\,A = 2$$

$$-\begin{cases} x_3 - x_4 = -1 - \alpha + 2\beta \\ x_3 + 5x_4 = 5 - \alpha + 2\beta, \end{cases} \quad \alpha = x_1,\ \beta = x_2,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$6x_4 = 6 \qquad \begin{cases} x_4 = 1 \\ x_3 = 2\beta - \alpha \end{cases}$$

Odp. układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań postaci:
(nieoznaczony)

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = 2\beta - \alpha \\ x_4 = 1 \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \text{Np}, \ (1, 2, 3, 1), \ (0, 0, 0, 1), \ldots$$

Zadanie 2

Zbadać liczbę rozwiązań układu równań $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 4 \\ 2mx + 3y = m \end{cases}$, w zależności od parametru rzeczywistego m.

Odp

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2m & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Obliczamy $\det A = -3 + 2m + 4m - 3 = 6m - 6 \neq 0$

dla $m \neq 1 \Rightarrow$ układ Cramera (oznaczony)

Dla $m = 1$, $r\,A = 2$ i $r\,U = r\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{+}{=} r\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$

$r\,A = 2 \neq r\,U = 3$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 18 \neq 0$$

Układ sprzeczny

Odp. Dokładnie jedno rozwiązanie dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ i brak rozwiązań dla $m = 1$.

$$\begin{cases} 2x + y - 3z - w = 0 \\ x + 2y - z - w = -1 \\ x + 3y + z + w = 0 \end{cases}$$

Kolokwium
- zespolone: potęgi, pierwiastki, wielomiany
- macierze - działania, r-nia z A^{-1}, wyznaczniki
- układy równań

$U_{3\times 5}$ i $A_{3\times 4}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 9 - 1 + 6 + 6 - 1 = 16 - 11 = 5 \neq 0 \Rightarrow r\,A = 3 \text{ i } r\,U = 3$$

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = w \\ x + 2y - z = w - 1 \\ x + 3y + z = -w \end{cases}, \ w \in \mathbb{R}$$

układ Cramera, $\det A_c = 5 \Rightarrow$ wzory Cramera