

# Matematyka 2

## Wykład nr 4

### 1. Funkcje dwóch i trzech zmiennych

#### Definicja 1.1 (otoczenie i sąsiedztwo punktu)

Otoczeniem o promieniu  $r > 0$  punktu  $P_0$  na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  lub w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , nazywamy zbiór  $O(P_0, r) = \{P : |P_0, P| < r\}$ .

Otoczeniem punktu na płaszczyźnie jest koło otwarte o środku w tym punkcie, otoczeniem punktu w przestrzeni jest kula otwarta o środku w tym punkcie.

Sąsiedztwem o promieniu  $r > 0$  punktu  $P_0$  na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  lub w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , nazywamy zbiór  $S(P_0, r) = O(P_0, r) \setminus \{P_0\}$ .

Sąsiedztwem punktu na płaszczyźnie jest koło otwarte bez środka, sąsiedztwem punktu w przestrzeni jest kula otwarta bez środka.

#### Definicja 1.2 (funkcja dwóch i trzech zmiennych)

Funkcją dwóch zmiennych określoną na zbiorze  $A \subset \mathbb{R}^2$ , o wartościach w  $\mathbb{R}$ , nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi ze zbioru  $A$  dokładnie jednej liczby rzeczywistej. Funkcję taką oznaczamy przez:

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{lub} \quad z = f(x, y).$$

Funkcją trzech zmiennych określoną na zbiorze  $A \subset \mathbb{R}^3$ , o wartościach w  $\mathbb{R}$ , nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi ze zbioru  $A$  dokładnie jednej liczby rzeczywistej. Funkcję taką oznaczamy przez:

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{lub} \quad w = f(x, y, z).$$

Na przykład,  $f(x, y) = \ln(x + 2y)$ ,  $g(x, y) = \frac{x}{y}$ ,  $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .

$\downarrow$

$(1, 1, \ln 3)$

$f(1, 1) = \ln 3; z = \ln 3$

$\nearrow$


$(1, \frac{x}{y}, \dots)$

### Definicja 1.3 (dziedzina, dziedzina naturalna)

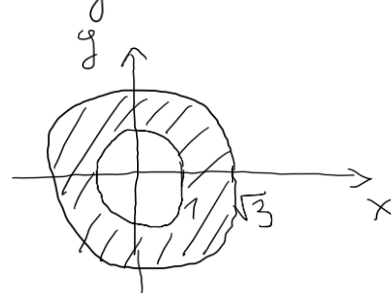
Niech  $f$  będzie funkcją określoną na podzbiorze płaszczyzny (przestrzeni). Zbiór ten nazywamy dziedziną funkcji i oznaczamy przez  $D_f$ . Jeżeli podany jest wyłącznie wzór określający funkcję, to zbiór punktów, dla których wzór ten ma sens nazywamy dziedziną naturalną  $f$ .

### Przykłady

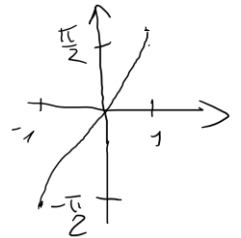
$$f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2); \quad g(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 2).$$

$$D_f: \begin{aligned} 1 - x^2 - y^2 &> 0 \\ x^2 + y^2 &< 1 \end{aligned}$$


$$D_g: \begin{aligned} -1 &\leq x^2 + y^2 - 2 \leq 1 \\ 1 &\leq x^2 + y^2 \leq 3 \end{aligned}$$



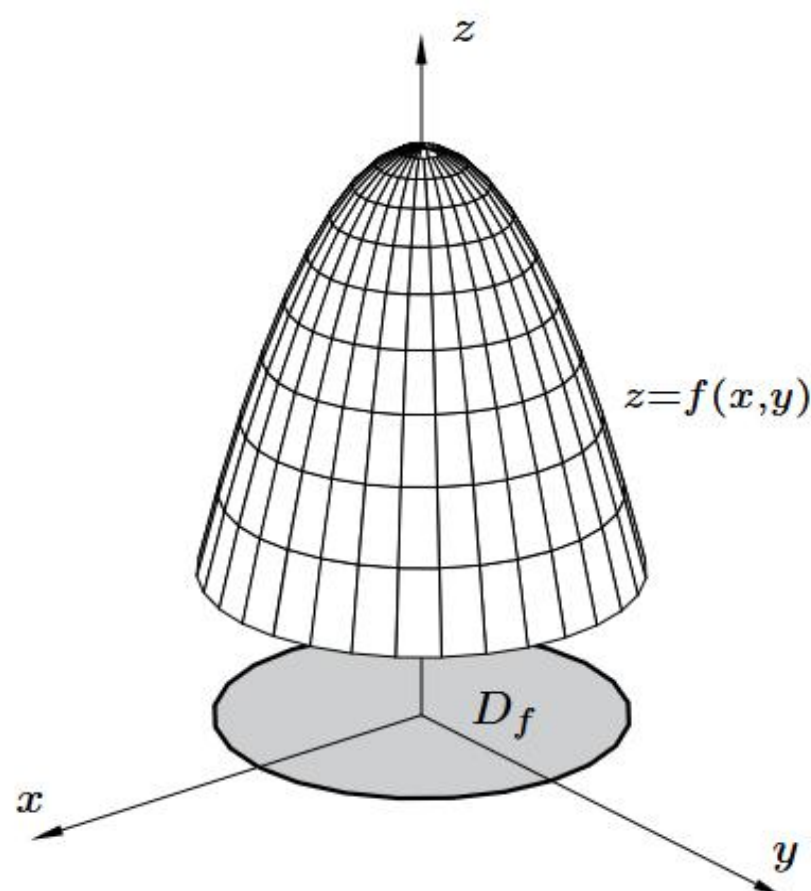
$\arcsin x$ :



### Definicja 1.4 (wykres i poziomica funkcji)

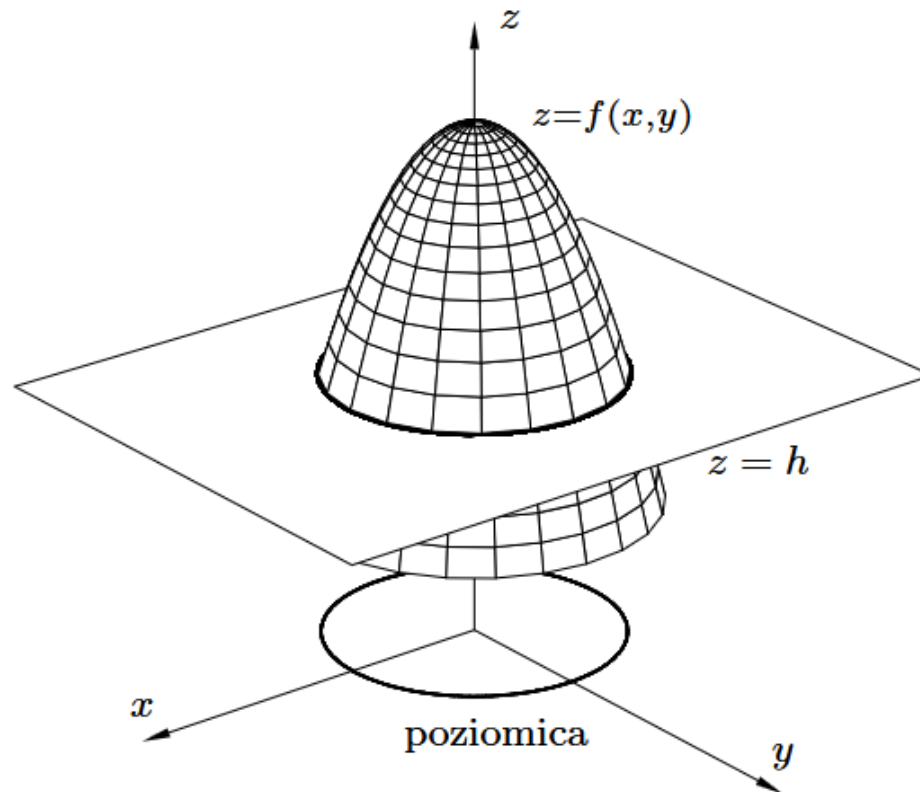
Wykresem funkcji dwóch zmiennych  $f(x, y)$  nazywamy zbiór punktów

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_f \text{ i } z = f(x, y)\}.$$



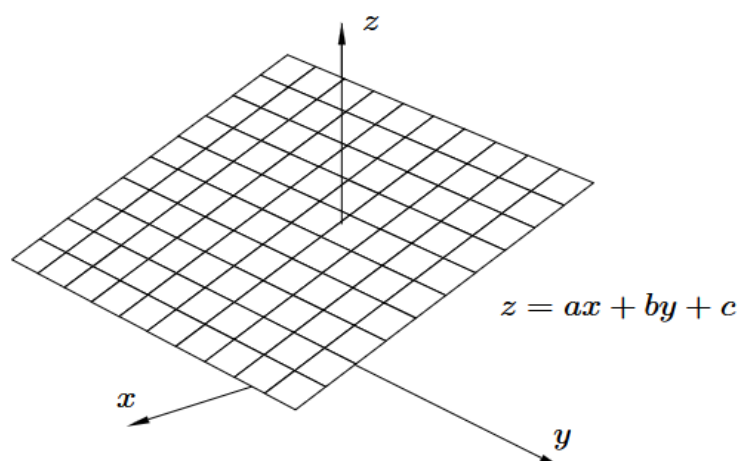
Poziomicą wykresu funkcji  $f(x, y)$  na poziomie  $z = h$  nazywamy zbiór

$$\{(x, y) \in D_f, f(x, y) = h\}.$$

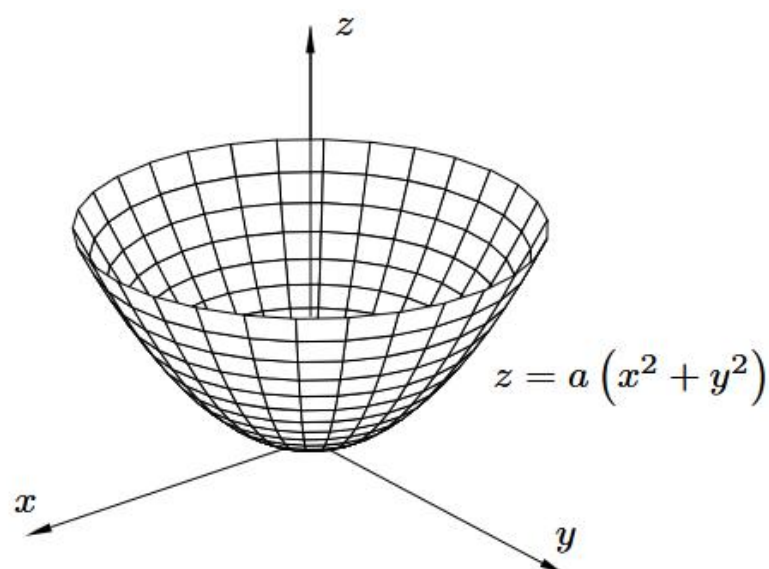


### Wykresy ważniejszych funkcji dwóch zmiennych

1. Płaszczyzna  $z = ax + by + c$



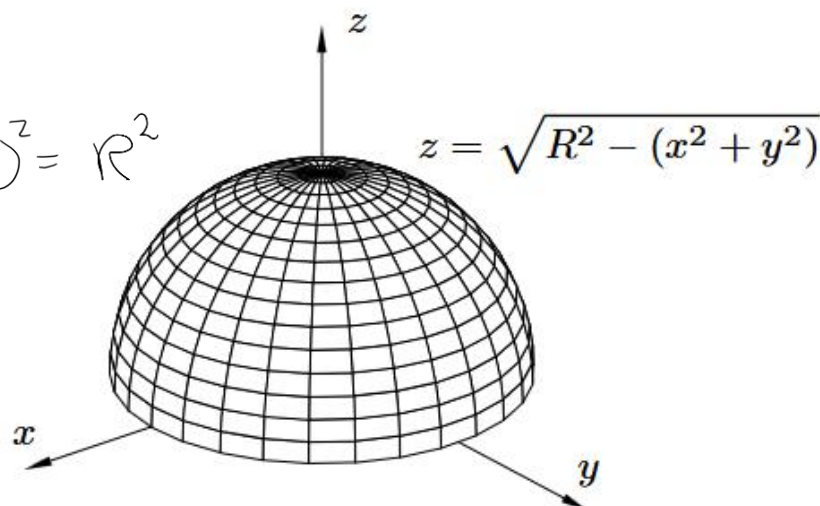
2. Paraboloida obrotowa  $z = a(x^2 + y^2)$ ,  $a \neq 0$ . Powierzchnia powstaje z obrotu paraboli  $z = ax^2$  dookoła osi  $Oz$ .



3. Półsfera (górną lub dolną) o środku w punkcie  $(0, 0, 0)$  i promieniu  $R > 0$ ,  
dana równaniem  $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ .

$S(a, b, c), R$ :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

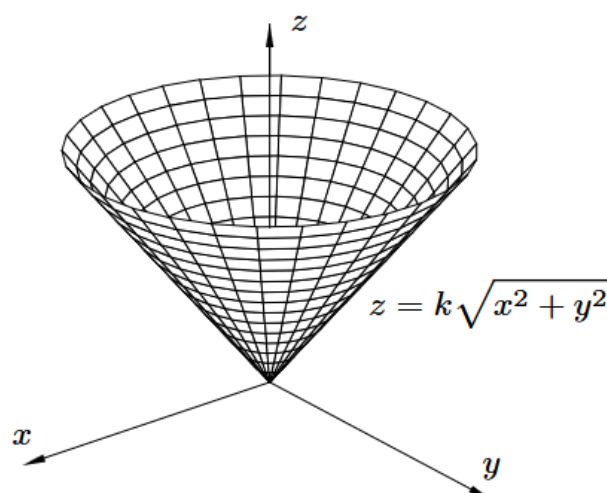
$$S(0(0,0,0), R)$$

$$z^2 = R^2 - x^2 - y^2$$

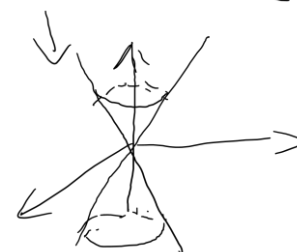
$$z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

$$z = -\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

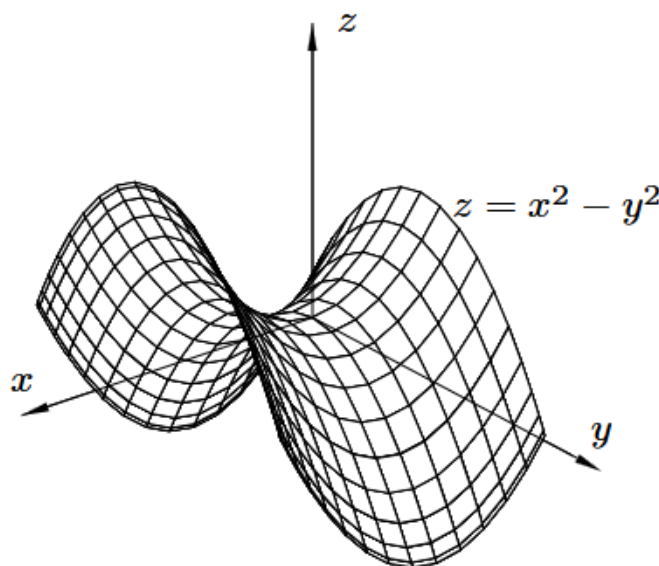
4. Powierzchnia stożkowa dana równaniem  $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $k \neq 0$ .



$$z^2 = x^2 + y^2 \quad \begin{matrix} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = -\sqrt{x^2 + y^2} \end{matrix}$$



5. Powierzchnia o równaniu  $z = x^2 - y^2$  (siodło).



### Przykłady

Naszukujemy wykresy funkcji:

1)  $g(x, y) = 3 - x^2 - y^2$ ;

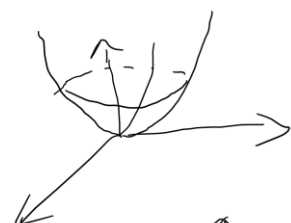
$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$z = \sqrt{4y - y^2 - x^2}.$$

1)  $z = 3 - (x^2 + y^2)$

1°  $z_1 = x^2 + y^2$

2°  $z_2 = -(x^2 + y^2)$

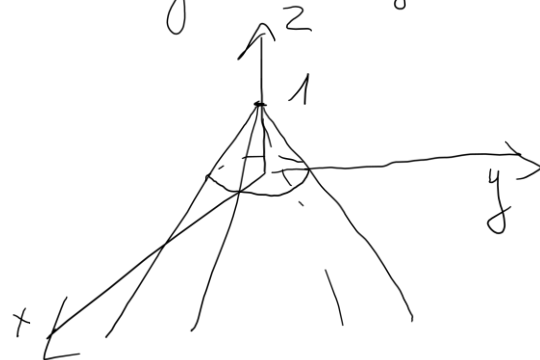


$$3^o \quad z = z = -(x^2 + y^2) + 3$$



$$2) \quad z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

Analogicznie jak w 1:



$$3) \quad \begin{aligned} z &= \sqrt{4y - y^2 - x^2} \quad |^2 \\ z^2 &= 4y - y^2 - x^2 \end{aligned}$$

→ górna połowa sfery

$$x^2 + y^2 - 4y + z^2 = 0$$

$$x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4$$

Sfera:  $(0, 2, 0)$  i  $R = 2$

## 2. Pochodne cząstkowe funkcji

### Definicja 2.1 (pochodne cząstkowe I – go rzędu)

Niech funkcja  $f(x, y)$  będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu  $(x_0, y_0)$ . Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji  $f$  względem zmiennej  $x$  w punkcie  $(x_0, y_0)$  określamy wzorem:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

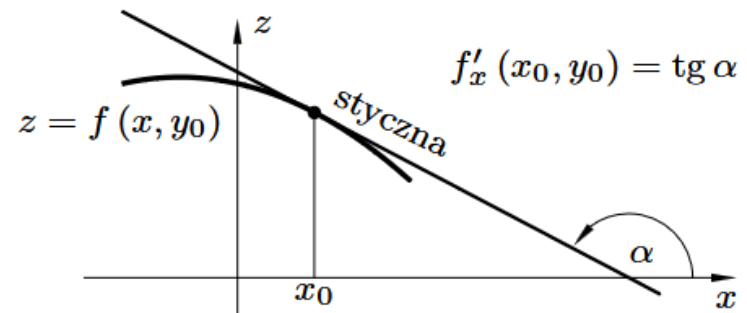
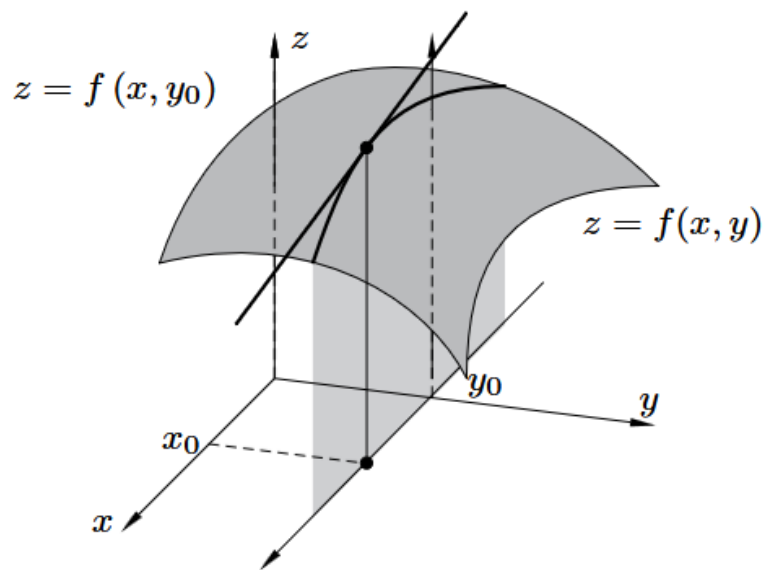
Pochodna cząstkowa pierwszego rzędu funkcji  $f$  względem zmiennej  $y$  w punkcie  $(x_0, y_0)$  określona jest następująco:

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Pochodne cząstkowe oznaczamy również przez

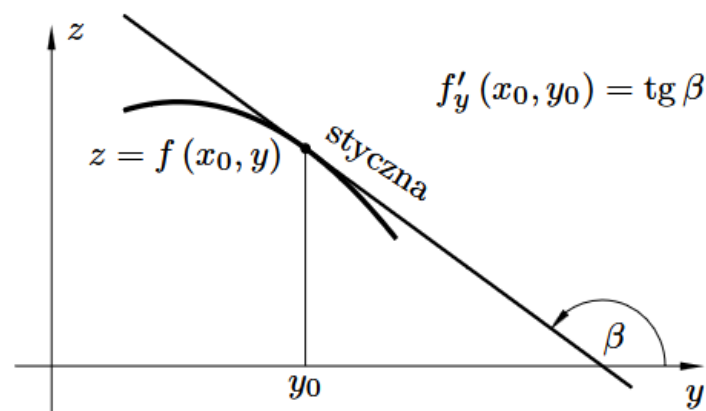
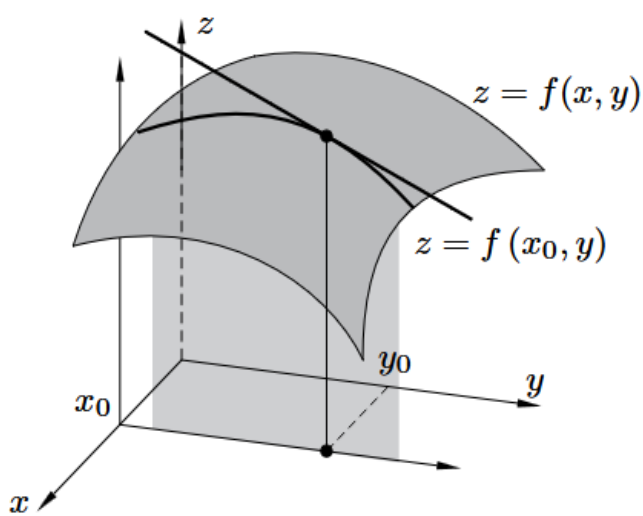
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

## Interpretacja geometryczna pochodnej $f'_x$



Pochodna cząstkowa  $f'_x(x_0, y_0)$  jest miarą lokalnej szybkości wzrostu funkcji  $f$  względem zmiennej  $x$  przy ustalonej wartości zmiennej  $y$ .

Analogicznie jest w przypadku pochodnej cząstkowej względem  $y$ .



### Definicja 2.2 (pochodne cząstkowe I – go rzędu)

Jeżeli funkcja  $f$  ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w każdym punkcie pewnego zbioru otwartego  $D \subset \mathbb{R}^2$ , to funkcje

$$f'_x(x, y), f'_y(x, y), \quad \text{gdzie } (x, y) \in D,$$

Nazywamy pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu funkcji  $f$  na zbiorze  $D$  i oznaczamy odpowiednio  $f'_x$ ,  $f'_y$  lub  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

### Uwaga

Obliczając pochodną cząstkową względem  $x$ , zmienną  $y$  traktujemy jak stałą (obliczając pochodną po  $y$ , zmienną  $x$  traktujemy jak stałą). Stosujemy przy tym reguły różniczkowania funkcji jednej zmiennej.



## Przykłady

Obliczymy pochodne cząstkowe I – go rzędu funkcji:

1)  $f(x, y) = 1 - x^2 - 3y^2 + xy$ ;

*Zalutujemy obliczanie pochodnych,  
dla  $(x, y) \in D_f$*

2)  $f(x, y) = \frac{x}{y} + x\sqrt{y}$ ;

3)  $f(x, y) = x \ln(x^2 - 3y^2)$ .

Ad. 1)  $f'_x(x, y) = (1 - x^2 - 3y^2 + xy)'_x = \underbrace{(1)'_x}_0 - (x^2)'_x - \underbrace{(3y^2)'_x}_0 + (xy)'_x =$   
 $= -2x + y$

$f'_y(x, y) = (1 - \underbrace{x^2}_{\text{stała}} - 3y^2 + xy)'_y = 0 - 0 - 6y + x = x - 6y$

Ad. 2)  $f'_x(x, y) = (\frac{x}{y} + x\sqrt{y})'_x = \frac{1}{y} + \sqrt{y}$

$f'_y(x, y) = x \cdot (y^{-1})'_y + x \cdot (y^{\frac{1}{2}})'_y = -\frac{x}{y^2} + \frac{x}{2\sqrt{y}}$

Ad. 3)  $f'_x(x, y) = (x \cdot \ln(x^2 - 3y^2))'_x \stackrel{\text{wz6w na pochodn6}}{\underset{\text{iloczyn}}{=}} = 1 \cdot \ln(x^2 - 3y^2) +$   
 $+ x \cdot \frac{1}{x^2 - 3y^2} \cdot 2x = \ln(x^2 - 3y^2) + \frac{2x^2}{x^2 - 3y^2}$

$f'_y(x, y) = x \cdot \frac{1}{x^2 - 3y^2} \cdot (-6y) = \frac{-6xy}{x^2 - 3y^2}$

## Definicja 2.3 (pochodne cząstkowe II – go rzędu)

Jeżeli funkcja  $f$  ma pochodne cząstkowe  $f'_x$ ,  $f'_y$  przynajmniej na otoczeniu punktu  $(x_0, y_0)$ . Pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji  $f$  w punkcie

$(x_0, y_0)$  określamy następująco:

$\underbrace{f''_{xx}(x_0, y_0)} = [f'_x]'_x(x_0, y_0), \quad \underbrace{f''_{xy}(x_0, y_0)} = \overset{\text{najp6ierw po y}}{\downarrow} [f'_y]'_x(x_0, y_0),$   
 $\underbrace{f''_{yx}(x_0, y_0)} = \overset{\text{najp6ierw po x}}{\uparrow} [f'_x]'_y(x_0, y_0), \quad \underbrace{f''_{yy}(x_0, y_0)} = [f'_y]'_y(x_0, y_0).$

Oznaczamy je także przez:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Jeżeli funkcja  $f$  ma pochodne cząstkowe drugiego rzędu w każdym punkcie pewnego zbioru otwartego  $D \subset \mathbb{R}^2$ , to funkcje

$$f''_{xx}(x, y), f'_{yx}(x, y), f'_{xy}(x, y), f'_{yy}(x, y) \text{ gdzie } (x, y) \in D,$$

nazywamy pochodnymi cząstkowymi drugiego rzędu funkcji  $f$  na zbiorze  $D$  i oznaczamy odpowiednio  $f''_{xx}$ ,  $f''_{yx}$ ,  $f''_{xy}$ ,  $f''_{yy}$ .

### Przykłady

Obliczymy pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji:

1)  $f(x, y) = 1 - x^2y - 3xy^2 + x$ ;

2)  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ ;

3)  $f(x, y) = x \ln(x^2 - 3y)$ .

4)  $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ .

Ad. 1.  $f'_x(x, y) = -2xy - 3y^2 + 1 \rightarrow f'_y(x, y) = -x^2 - x \cdot 6y = -x^2 - 6xy$   
pochodne I rzędu

Pochodne II-go rzędu:

$f''_{xx} = (f'_x)'_x = (-2xy - 3y^2 + 1)'_x = -2y$  pochodne „czyste”  
 $f''_{yy} = (f'_y)'_y = (-x^2 - 6xy)'_y = -6x$

$f''_{xy} = (f'_y)'_x = (-x^2 - 6xy)'_x = -2x - 6y$  pochodne mieszane  
 $f''_{yx} = (f'_x)'_y = (-2xy - 3y^2 + 1)'_y = -2x - 6y$

Ad. 2.

$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$   $f(x, y) = \frac{x^2}{xy} - \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$

Pochodne I rzędu:

$f'_x = \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{y} - y \left(\frac{1}{x}\right)'_x = \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}$

$f'_y = \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)'_y = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}$

Pochodne II rzędu „czyste”:

$f''_{xx} = \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}\right)'_x = \left(\frac{y}{x^2}\right)'_x = y \cdot (x^{-2})'_x = -2x^{-3} \cdot y = -\frac{2y}{x^3}$

$f''_{yy} = \left(-\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}\right)'_y = \left(-x \cdot y^{-2}\right)'_y = -x \cdot (-2y^{-3}) = \frac{2x}{y^3}$



Pochodne II rzędu „mieszane”:

$$f''_{xy} = (f'_y)'_x = \left(-\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}\right)'_x = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}; \quad f''_{yx} = (f'_x)'_y = \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}\right)'_y = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$$

Ad. 4.

$$f(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$$

$$f'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y^{\cancel{2}}}{y^2 + x^2} \cdot \frac{1}{\cancel{y}} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$f'_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{y^2 + x^2}$$

$$f''_{xx} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)'_x = \frac{0 - y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f''_{yy} = \left(\frac{-x}{x^2 + y^2}\right)'_y = \frac{0 + x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f''_{xy} = \left(\frac{-x}{x^2 + y^2}\right)'_x = \frac{-x^2 - y^2 + x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f''_{yx} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)'_y = \frac{x^2 + y^2 - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

## Uwaga

Pochodne cząstkowe wyższych rzędów otrzymujemy poprzez wielokrotne różniczkowanie funkcji  $f$ . Pochodne cząstkowe, w których występuje różniczkowanie względem różnych zmiennych, nazywamy pochodnymi mieszanymi (w odróżnieniu do pochodnych czystych).

## Twierdzenie 2.1 (Schwarza o pochodnych mieszanych)

Jeżeli pochodne mieszane  $f''_{yx}$ ,  $f''_{xy}$  są ciągłe w punkcie  $(x_0, y_0)$ , to są w tym punkcie równe

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

W naszym kursie będziemy się zajmować wyłącznie takimi pochodnymi

Prawdziwe są analogiczne równości dla pochodnych mieszanych wyższych rzędów.

Niech  $f(x, y, z) = x^4z - y^3z^3 + xy$ , obliczmy

$f'''_{xxz}(x, y, z) \leftarrow$  pochodna cząstkowa trzeciego rzędu

$$f'''_{xxz} = \left[ \left( f'_z \right)'_x \right]'_x$$

$$f'_z = (x^4z - y^3z^3 + xy)'_z = x^4 - 3y^3z^2$$

↓ ↓  
stałe

$$f''_{xz} = (x^4 - 3y^3z^2)'_x = 4x^3$$

↑ ↑  
stałe

$$f'''_{xxz} = (4x^3)'_x = \underline{\underline{12x^2}}$$

Czy kolejność różniczkowania ma znaczenie?

Policzmy  $f'_{zxx} = \left[ \left( f'_x \right)'_x \right]'_z$

$$f'_x = (x^4z - y^3z^3 + xy)'_x = 4x^3z + y$$

$$f''_{xx} = (4x^3z + y)'_x = 12x^2z$$

$$\left[ f''_{xx} \right]'_z = (12x^2z)'_z = \underline{\underline{12x^2}}$$

W przypadku pochodnych mieszanych wyższych rzędów tw. Schwarz'a również ma zastosowanie

$$f'''_{xxz} = f'''_{x^2z} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x^2}$$

Np.  $f^{(5)}_{x^2y^3}$

|| Zastosowanie pochodnych cząstkowych I-go i II-go rzędu do wyznaczania ekstremum lokalnego funkcji dwóch zmiennych.  $\Rightarrow$  wykład 5