

Wykład nr 2

Matematyka 1

Politechnika Rzeszowska

Październik 2026

E. Czerebak - Mrozowicz

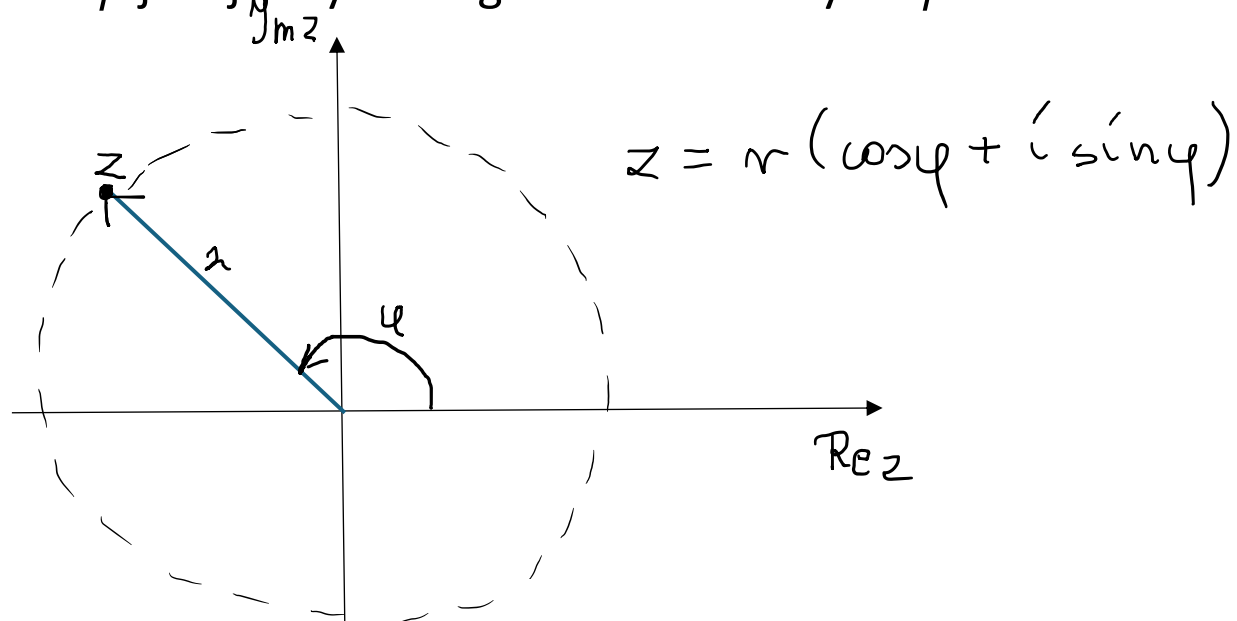
5. Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Fakt 5.1 (postać trygonometryczna liczby zespolonej)

Każdą liczbę zespoloną z można zapisać w postaci

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

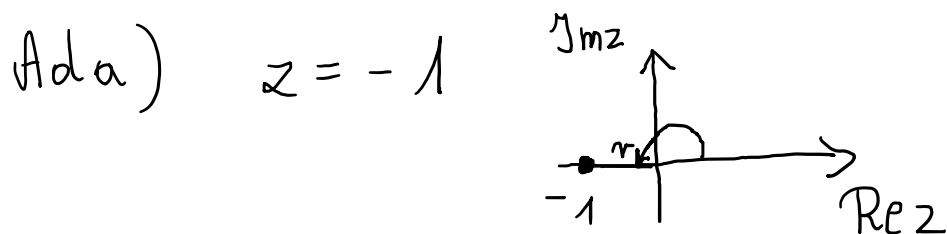
gdzie $r = |z|$, $r \geq 0$, natomiast φ jest jednym z argumentów liczby z i $\varphi \in \mathbb{R}$.



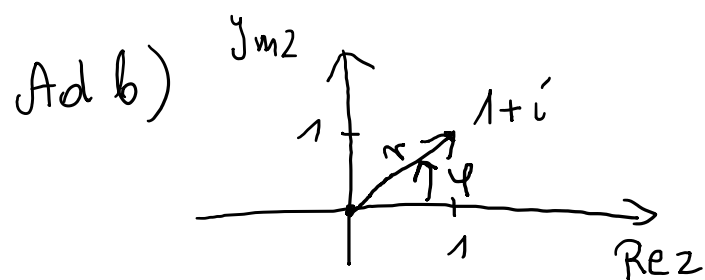
Zadanie 1

Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej

a) $z = -1$, b) $z = 1 + i$, c) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$



$$\cos n\pi = (-1)^n$$
$$\cos n\pi = \begin{cases} 1 & \text{dla } n=2k \\ -1 & \text{dla } n=2k+1 \end{cases}$$
$$-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$$
$$-1 = \underbrace{\cos \pi}_{-1} + i \underbrace{\sin \pi}_0$$



$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Ad c) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \cos \varphi = \frac{x}{|z|} = -\frac{1}{2} \\ \sin \varphi = \frac{y}{|z|} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \text{III} \quad \varphi = \pi + \alpha, \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\varphi = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right) = \cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi$$

Fakt 5.2 (Równość liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej)

Liczyby zespolone $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, gdzie $r_1, r_2 \geq 0$ oraz $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$, są równe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r_1 = r_2 \text{ oraz } \varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi, \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{Z}.$$



Fakt 5.3 (Mnożenie i dzielenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej)

Niech $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, gdzie $r_1, r_2 \geq 0$ oraz $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$, będą liczbami zespolonymi. Wtedy:

$$\text{mnożenie: } z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)];$$

$$\text{dzielenie: } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \text{ o ile } z_2 \neq 0.$$

Tak więc mnożąc liczby zespolone w postaci trygonometrycznej, mnożymy moduły a argumenty dodajemy. Podczas dzielenia, moduły dzielimy, argumenty odejmujemy.

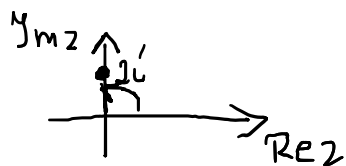
Uwaga! Wzór na mnożenie jest prawdziwy również dla dowolnej liczby czynników.

Zadanie 2

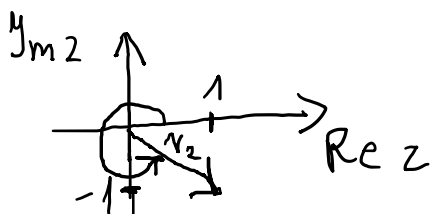
Korzystając z postaci trygonometrycznej obliczyć podane ilorazy

$$\text{a) } \frac{2i}{1-i}; \quad \text{b) } \frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}; \quad \text{c) } \frac{3+3i}{i-1}.$$

$$\text{Ad. a) } z_1 = 2i, \quad r_1 = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$



$$z_2 = 1 - i$$



$$r_2 = \sqrt{2}, \quad \varphi_2 = \frac{7}{4}\pi, \quad z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right)$$

tu już nieporozumienie

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7}{4}\pi\right) \right) = \frac{2\sqrt{2}}{2} \left(\underbrace{\cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right)}_{\text{f-ga parzysta}} + i \sin\left(-\frac{5}{4}\pi\right) \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{5}{4}\pi - i \sin \frac{5}{4}\pi \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(-\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \underline{\underline{-1 + i}} \end{aligned}$$

$$\frac{2i}{1-i} = \frac{2i \cdot (1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i + 2i^2}{1+1} = \frac{-2 + 2i}{2} = \underline{\underline{-1 + i}}$$

Potęgowanie liczby zespolonej

Fakt 5.4 (Wzór de Moivre'a) (wyt. de muavra)

Niech $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)). \quad \begin{array}{l} r^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n \\ r^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)] \end{array}$$

Zadanie 3

Obliczyć podane potęgi liczb zespolonych wykorzystując wzór de Moivre'a

a) $(2 - 2i)^{22}$; b) $(i - \sqrt{3})^{60}$; c) $(\sqrt{2}i - \sqrt{2})^{17}$.

a) $z = 2 - 2i$

$$x=2, y=-2 \Rightarrow |z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \backslash \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \swarrow \quad \text{IV ćw}, \quad \varphi = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$

$$z = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right) \right)$$

$$(n=22) \quad z^{22} = (2\sqrt{2})^{22} \left(\cos\left(22 \cdot \frac{7}{4}\pi\right) + i \sin\left(22 \cdot \frac{7}{4}\pi\right) \right)$$

$$z^{22} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{22} \left(\cos \frac{77}{2}\pi + i \sin \frac{77}{2}\pi \right)$$

$$z^{22} = 2^{33} \left(\cos \left(\underbrace{38\pi}_{19(2\pi)} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\underbrace{38\pi}_{19(2\pi)} + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$z^{22} = 2^{33} \left(\underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 + i \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 \right) = \underline{\underline{2^{33} i}}$$

$$c) (\sqrt{2}i - \sqrt{2})^{17}$$

$$z = \sqrt{2}i - \sqrt{2}$$

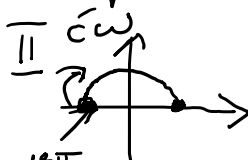
$$x = -\sqrt{2}, y = \sqrt{2} \Rightarrow |z| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos \varphi = \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \underbrace{\pi \text{ c.w.}}_{\Rightarrow} \varphi = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{4}\pi}}$$

$$(\sqrt{2}i - \sqrt{2})^{17} = \left[2 \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \right) \right]^{17} = 2^{17} \left(\cos\left(17 \cdot \frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(17 \cdot \frac{3}{4}\pi\right) \right)$$

$$(\sqrt{2}i - \sqrt{2})^{17} = 2^{17} \left(\cos\left(\frac{51}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{51}{4}\pi\right) \right) = 2^{17} \left(\cos\left(13\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(13\pi - \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$\underbrace{12\pi + \frac{3}{4}\pi}_{135^\circ}$


$$(\sqrt{2}i - \sqrt{2})^{17} = 2^{17} \left(-\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2^{17} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2^{16} (-\sqrt{2} + i\sqrt{2})$$

Ad. b)

$$z = i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + i$$

$$x = -\sqrt{3}$$

$$y = 1$$

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \underbrace{\pi \text{ c.w.}}_{\Rightarrow}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \pi - \alpha, \quad \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\varphi = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

$$-\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right)$$

$$(-\sqrt{3} + i)^{60} = 2^{60} \left(\cos 60 \cdot \frac{5}{6}\pi + i \sin 60 \cdot \frac{5}{6}\pi \right) =$$

$$= 2^{60} \left(\cos 50\pi + i \underbrace{\sin 50\pi}_{\sin k\pi = 0} \right) = 2^{60} (1 + 0) = \underline{\underline{2^{60}}}$$

Ad a) $(2 - 2i)^{22}$

$$x = 2$$

$$y = -2$$

$$r = |z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{r} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\underbrace{\pi \text{ c.w.}}_{\Rightarrow}$

$$\varphi = 2\pi - \alpha, \\ \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

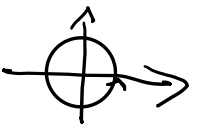
$$2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$(2 - 2i)^{22} = \left[2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \right]^{22} =$$

$$= (2\sqrt{2})^{22} \left(\cos 22 \cdot \frac{7\pi}{4} + i \sin 22 \cdot \frac{7\pi}{4} \right) =$$

$$= (2^{\frac{3}{2}})^{22} \left(\cos \frac{77\pi}{2} + i \sin \frac{77\pi}{2} \right) = 2^{33} \left(\cos (38\pi + \frac{\pi}{2}) + i \sin (38\pi + \frac{\pi}{2}) \right) =$$

$$= 2^{33} \left(\underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 + i \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 \right) = 2^{33} \cdot i = -2^{33} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}} \cdot i = 2^{33} i$$



II sposób $(2 - 2i)^{22} = [2(1 - i)]^{22} = 2^{22} [(1 - i)^2]^{11} = 2^{22} (1 - 2i + \underbrace{i^2}_{-1})^{11} = 2^{22} (-2i)^{11} =$

6. Postać wykładnicza liczby zespolonej

Definicja 6.1

Dla $\varphi \in \mathbb{R}$ liczbę zespoloną $\cos \varphi + i \sin \varphi$ oznaczamy przez $e^{i\varphi}$

$$e^{i\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Uwaga! Liczba e jest stałą matematyczną, nazywaną liczbą Eulera i równą w przybliżeniu $e \approx 2,718$.

Fakt 6.1 (Własności $e^{i\varphi}$)

Niech $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz niech k będzie dowolną liczbą całkowitą. Wtedy

1. $e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2};$
2. $e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}};$
3. $(e^{i\varphi})^k = e^{i\varphi k};$
4. $e^{i(\varphi + 2k\pi)} = e^{i\varphi};$
5. $e^{i\varphi} \neq 0;$
5. $|e^{i\varphi}| = 1.$

Fakt 6.1 (Wzory Eulera)

Niech $x \in \mathbb{R}$, wtedy prawdziwe są wzory:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Fakt 6.2 (Postać wykładnicza liczby zespolonej)

Każdą liczbę zespoloną z można zapisać w postaci wykładniczej, tj. w postaci

$$z = re^{i\varphi}, \quad r = |z|$$

gdzie $r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$. Liczba r jest modułem liczby z a φ jej argumentem.

Fakt 6.3 (Działania na liczbach zespolonych w postaci wykładniczej)

Niech $z = r e^{i\varphi}$, $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, gdzie $r, r_1, r_2 \geq 0$ i $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathbb{R}$, będą liczbami zespolonymi. Niech k będzie liczbą całkowitą. Wtedy:

1. $\bar{z} = r e^{-i\varphi};$

2. $-z = r e^{-i(\varphi + \pi)};$
3. $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi};$

4. $z^k = r^k e^{i\varphi k};$
5. $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$

6. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$

7. Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Definicja 7.1 (Pierwiastek z liczby zespolonej)

Pierwiastkiem stopnia $n \in \mathbb{N}$ z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną ω , która spełnia równość

$$\omega^n = z.$$

Symbol $\sqrt[n]{z}$ oznacza zbiór pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej z .

Uwaga! Przykłady różnic w interpretacji pojęcia pierwiastka w zbiorze liczb rzeczywistych i zespolonych

W zbiorze $\mathbb{R}$	W zbiorze $\mathbb{C}$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{9} = \{-3, 3\}$
$\sqrt[4]{1} = 1$	$\sqrt[4]{1} = \{-1, 1, i, -i\}$
$\sqrt{-1}$ nie istnieje	$\sqrt{-1} = \{-i, i\}$

Fakt 7.1 (wzór na pierwiastki z liczby zespolonej w postaci trygonometrycznej)

Każda liczba zespolona $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $r > 0$ i $\varphi \in \mathbb{R}$, ma dokładnie n pierwiastków stopnia n . Zbiór tych pierwiastków ma postać:

$$\sqrt[n]{z} = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\},$$

$$k=0, 1, 2, \dots, n-1$$

gdzie $z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$ dla $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $r = |z|$

↑
pierwiastek n-ty z liczby zespolonej

- W interpretacji geometrycznej zbiór pierwiastków stopnia $n \geq 3$ z liczby zespolonej z , pokrywa się ze zbiorem wierzchołków n -kąta foremnego wpisanego w okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu równym $\sqrt[n]{r}$.

Zadanie 4

Wyznaczyć z definicji pierwiastki zespolone $\sqrt{-7 + 24i}$.

Zadanie 5

Obliczyć podane pierwiastki i podać ich interpretację geometryczną

- a) $\sqrt[3]{8i}$;
b) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$;
c) $\sqrt[8]{1}$;

Zadanie 6

Rozwiązać równania kwadratowe

- a) $z^2 + 3z + 3 - i = 0$;
b) $z^2 + (2i - 1)z + 1 + 5i = 0$.

a) $z^2 + 3z + 3 - i = 0$ ($x^2 + 3x + 3 - i = 0$) $x \in \mathbb{C}$

$a = 1$
 $b = 3$
 $c = 3 - i$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot (3 - i) = 9 - 12 + 4i$

$\Delta = -3 + 4i$

$\sqrt{\Delta} =$

Niech $\sqrt{\Delta} = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

$\Delta = (x + iy)^2$

$-3 + 4i = x^2 + 2xyi - y^2$

$-3 + 4i = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$\begin{cases} -3 = x^2 - y^2 \\ 4 = 2xy \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2}{x}, x \neq 0$

$-3 = x^2 - \frac{4}{x^2} \quad (1)$

$y = \frac{2}{x}$

(1) $x^2 - \frac{4}{x^2} + 3 = 0 \quad | \cdot x^2$

$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

Niech $x^2 = t$, $t > 0$

$t^2 + 3t - 4 = 0$

$\Delta_t = 9 + 16 = 25$

$t_1 = \frac{-3 + 5}{2} = 1$

$$x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \vee x=-1 \\ y=2 \vee y=-2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \{1+2i, -1-2i\}$$

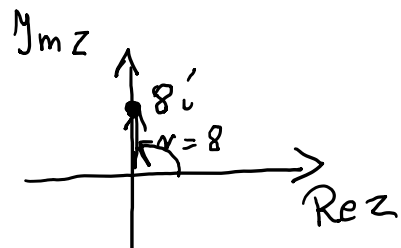
$$z_1 = \frac{-3-1-2i}{2} = \frac{-4-2i}{2} = \underline{\underline{-2-i}}$$

$$z_2 = \frac{-3+1+2i}{2} = \frac{-2+2i}{2} = \underline{\underline{-1+i}}$$

Ad. 5.

$$\sqrt[3]{8i} = ?$$

$8i \rightarrow$ postać trygonometryczna



$$z = 8i$$

$$n = 3$$

$$\sqrt[3]{8i} = \{z_0, z_1, z_2\}$$

$$|z| = |8i| = 8 \quad i \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{wzór: } z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Pierwiastki:

$$z_0 = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

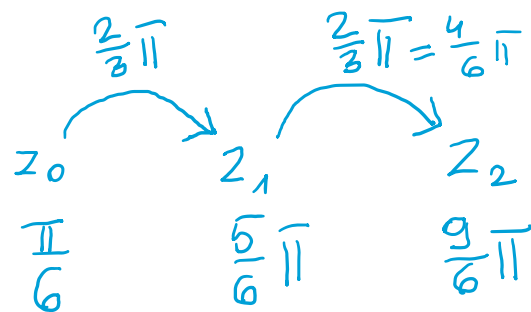
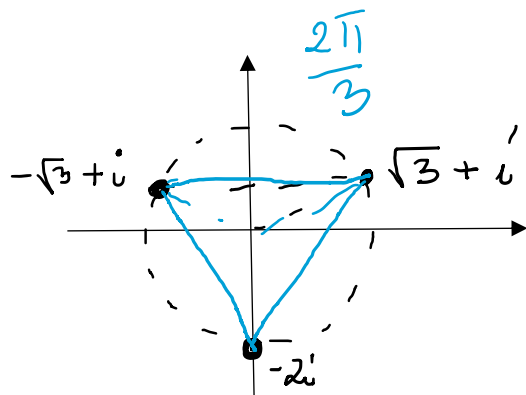
$$\underline{\underline{z_0 = \sqrt{3} + i}}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) =$$

$$= 2 \left(\cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) \right) = 2 \left(-\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$\underline{\underline{z_1 = -\sqrt{3} + i}}$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right) = -2i$$



Zad. 4.

$\sqrt{-7+24i}$ - wyznaczmy pierwiastki sposobem algebraicznym

$$z = -7 + 24i$$

$$\text{Niech } \sqrt{-7+24i} = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Podnosimy obie strony do kwadratu

$$-7 + 24i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$$

$$-7 + 24i = (x^2 - y^2) + 2xyi \quad \leftarrow \text{równość liczb zespolonych}$$

$$1^o \begin{cases} -7 = x^2 - y^2 \end{cases}$$

$$x, y \in \mathbb{R}$$

$$2^o \begin{cases} 24 = 2xy \end{cases} \Rightarrow \underline{y = \frac{12}{x}}$$

$$1^o \quad -7 = x^2 - \frac{144}{x^2} \quad | \cdot x^2$$

$$x^4 + 7x^2 - 144 = 0$$

rownanie dwukwadratowe

$$\text{Niech } t = x^2, \quad t > 0$$

$$t^2 + 7t - 144 = 0$$

$$\Delta_t = 49 - 4(-144) = 625 \quad \sqrt{\Delta_t} = 25$$

576

$$t_1 = \frac{-7-25}{2} = -16 < 0$$

$$y = \frac{12}{x}$$

$$t_2 = \frac{-7+25}{2} = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$\underline{\sqrt{-7+24i} = \{3+4i; -3-4i\}}$$

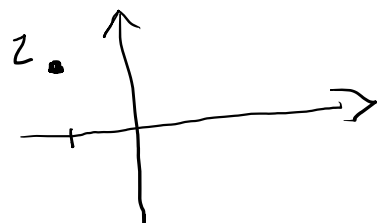
Zad. 5.b)

$$\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Wyznaczymy moduł i argument liczby z .

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \underline{1}$$



φ :

$$\cos \varphi = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ów||

$$\varphi = \pi - \alpha, \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\underline{\varphi = \frac{2\pi}{3}}$$

$$\sqrt[4]{2} = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$$

$$k = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$n = 4$$

$$r = 1$$

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

$$z_0 = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\frac{2}{3}\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{2}{3}\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$$

(k=0)

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Diagram showing the sequence of angles: $\frac{\pi}{6} \xrightarrow{+\frac{\pi}{2}} \frac{4\pi}{6} \xrightarrow{+\frac{\pi}{2}} \frac{7\pi}{6} \xrightarrow{+\frac{\pi}{2}} \frac{10\pi}{6}$

$$z_1 = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\frac{2}{3}\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{2}{3}\pi + 2\pi}{4} \right) = \cos \frac{8}{12}\pi + i \sin \frac{8}{12}\pi$$

(k=1)

$$z_1 = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$$

$$z_1 = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z_1 = -\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \cos \frac{\frac{2}{3}\pi + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{2}{3}\pi + 4\pi}{4} = \cos \frac{14}{12}\pi + i \sin \frac{14}{12}\pi =$$

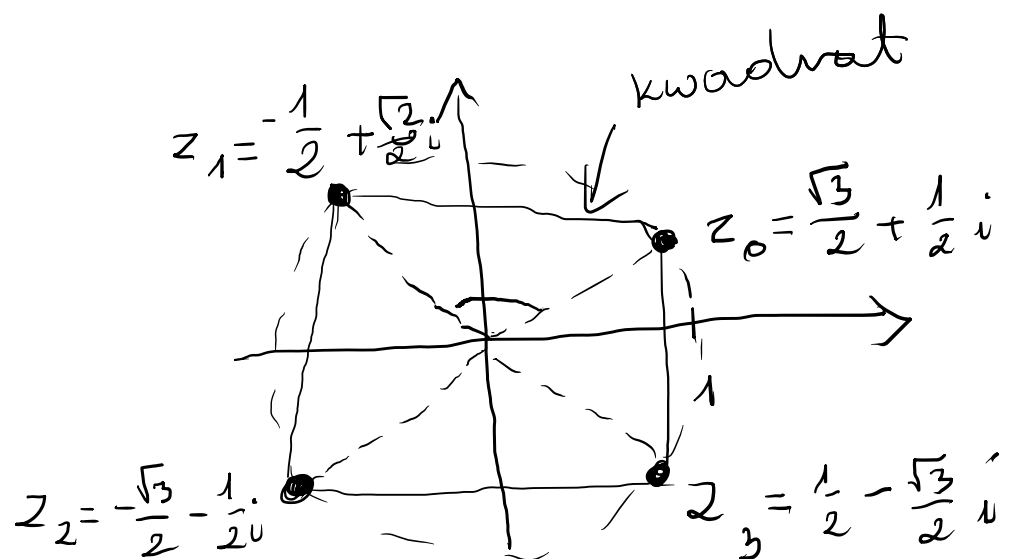
k=2

$$= \cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi$$

$$z_2 = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



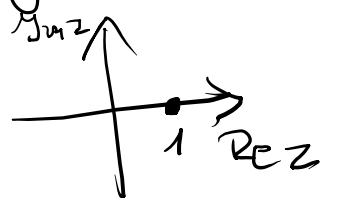
Wyznaczyć $\sqrt[6]{1}$ w zbiorze liczb zespolonych

$$z = 1, \quad z = 1 (\cos 0 + i \sin 0)$$

$$r = 1 \quad \varphi = 0$$

$$n = 6$$

$$\sqrt[6]{1} = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$$



Jednym z pierwiastków jest liczba 1, bo

$$1^6 = 1$$

$$z_0 = 1$$

$$z_0 = \sqrt[6]{1} \left(\cos \frac{0}{6} + i \sin \frac{0}{6} \right) = \underline{\underline{1}}$$

$$K = \emptyset$$

$$Z_1 = \sqrt[6]{1} \left(\cos \frac{0+2\pi}{6} + i \sin \frac{0+2\pi}{6} \right)$$

$$k=1$$

$$z_1 = \sqrt[5]{1} \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{5}}{2}}}$$

$$Z_2 = \underbrace{\text{exp}} - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$), \underline{z_3 = -1}, \underline{z_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$z_5 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

